

AO - 9321

THESE

présentée

A L'U.E.R. DE PHYSIQUE DE L'UNIVERSITE DE NANTES

par

Michel LE STUM

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

CONTRIBUTION A L'ETUDE AEROTHERMIQUE

D'UN ECOULEMENT TURBULENT

LE LONG D'UN CANAL RECTANGULAIRE

DE FAIBLE EPAISSEUR

Soutenue le 19 décembre 1973 devant la Commission d'examen

M. H. MOUTON

Président

M. J.P. BARDON

M. J.J. BERNARD

M. J. GOSSE

Examineurs

THESE

présentée

A L'U.E.R. DE PHYSIQUE DE L'UNIVERSITE DE NANTES

par

Michel LE STUM

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

CONTRIBUTION A L'ETUDE AEROTHERMIQUE

D'UN ECOULEMENT TURBULENT

LE LONG D'UN CANAL RECTANGULAIRE

DE FAIBLE EPAISSEUR

Soutenue le 19 décembre 1973 devant la Commission d'examen

M. H. MOUTON

Président

M. J.P. BARDON

M. J.J. BERNARD

M. J. GOSSE

Examineurs

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Thermodynamique de l'U.E.R. de Physique de Nantes, sous la direction de Monsieur le Professeur H. MOUTON, qui m'a proposé ce travail et m'a permis de le mener à bien.

Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je remercie également Messieurs les Professeurs J.P. BARDON, J.J. BERNARD et J. GOSSE pour les encouragements qu'ils m'ont formulés et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à cette étude.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur GUEVEL pour les entretiens qu'il m'a accordés, et à mes collègues du Laboratoire pour leur constante collaboration.

Je ne saurais oublier ceux qui ont réalisé le dispositif expérimental avec la plus grande compétence : Messieurs Dréno, Gauteur et Glazet ainsi que le personnel de l'atelier fer et de la menuiserie.

Mes remerciements s'adressent également à Madame Moquet qui a effectué avec beaucoup de patience et de soin la frappe de ce texte et sa mise en page, et au personnel de l'imprimerie.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
Chapitre I DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL	3
I - Généralités	3
II - Description détaillée du montage dynamique	5
III - Le système de chauffage	7
Chapitre II METHODES ET APPAREILLAGE DE MESURE	9
I - Mesures de pressions et de vitesses	9
II - Mesures de propriétés statistiques des signaux turbulents	13
III - Mesure du frottement pariétal	14
IV - Mesure des températures	15
V - Mesure de la densité de flux de chaleur - Coefficient d'échange	16
Chapitre III ETUDE EXPERIMENTALE DU CHAMP MOYEN DES PRESSIONS ET DES VITESSES LE LONG DU CANAL	18
I - Mise au point du montage - Influence de la géométrie d'entrée	18
II - Résultats expérimentaux - Généralités	20
III - Evolution des pressions le long de l'axe du canal	21
IV - Champ des vitesses le long du canal	22
V - Influence des petites faces du canal	22
VI - Détermination du coefficient de frottement le long du canal	25
VII - Conclusion	27

Chapitre IV	REPRESENTATIONS DU CHAMP DES VITESSES LE LONG D'UN CANAL EN ECOULEMENT TURBULENT INCOMPRESSIBLE	30
I - Lois tirées de l'analyse dimensionnelle		31
II - Caractère asymptotique de ces lois		34
III - Lois classiques de vitesse et de frottement		34
IV - Etude expérimentale des lois de parois le long du canal		37
V - Représentations déficitaires des résultats expérimentaux		41
VI - Conclusions concernant les lois classiques		44
VII - Autre propriété des lois extérieures : intermittence		45
VIII - Sur une nouvelle représentation du champ extérieur de vitesse en couche limite		46
Chapitre V	INTERPRETATION DES RESULTATS MIS EN EVIDENCE EN COUCHE LIMITE. ETUDE CRITIQUE DU MODELE DE HIRSCH	49
I - Généralités		49
II - Equations du mouvement d'un écoulement turbulent bidimen- sionnel en fluide incompressible		50
III - Description de la couche limite turbulente et des hypothèses de calcul		53
IV - Recherche d'une solution au problème en Y dans la C.L.P.D.		57
V - Interprétation critique des résultats tirés du modèle de Hirsch		61
VI - Etude de la sous-couche		68
VII - Etude critique de la condition de raccordement de la C.L.P.D. et de la sous-couche dans le modèle de Hirsch		71
VIII - Détermination de l'évolution de la vitesse au raccordement de la C.L.P.D. avec la sous-couche		73
IX - Cas où existe un gradient longitudinal extérieur de pression		75
Chapitre VI	LOIS D'EVOLUTION DU FROTTEMENT LE LONG D'UNE PLAQUE PLANE SANS GRADIENT LONGITUDINAL DE PRESSION	77
I - Loi de frottement déduite des résultats mis en évidence		77
II - Comportement aux fortes valeurs de Re - Compatibilité avec les lois asymptotiques classiques		79
III - Evolution du frottement aux faibles valeurs de Re		81
IV - Autres propriétés de la C.L.P.D. - La loi de frottement le long d'une plaque plane n'est pas unique		84

Chapitre VII	ETUDE DE LA ZONE DE MELANGE ET DE REGIME ETABLI LE LONG D'UN CANAL	86
I - Généralités		86
II - Extension à la zone de mélange de l'étude faite sur la couche limite turbulente		87
III - Détermination de la loi représentative du champ de vitesses en régime établi		90
IV - Remarques sur le critère de jonction avec la sous-couche le long du canal		93
V - Conséquences		96
VI - Remarque sur les écoulements dissymétriques en canaux		97
Chapitre VIII	ETUDE DE QUELQUES PROPRIETES THERMIQUES DE L'ECOULEMENT LE LONG D'UN CANAL	99
I - Etude expérimentale de l'évolution du transfert de chaleur le long du canal		99
II - Etude d'un champ thermique qui se développe à l'entrée du canal en même temps que la couche limite dynamique		101
III - Loi d'évolution du coefficient d'échange le long d'une plaque plane		105
CONCLUSION		110
BIBLIOGRAPHIE		117

I N T R O D U C T I O N

Une étude bibliographique des propriétés dynamiques et thermiques des écoulements turbulents le long de canaux montre que les travaux effectués traitent essentiellement de la zone de régime établi où les propriétés de l'écoulement deviennent indépendantes de la distance à l'entrée du canal.

Selon les auteurs cette distance est d'environ 60 à 80 fois la hauteur du canal. On admet souvent qu'elle est peu éloignée du point où les couches limites ont envahi tout le canal. Au-delà, on suppose qu'on peut se considérer en régime établi dont on connaît des lois universelles non reliées à l'écoulement en couche limite. Enfin des études théoriques suggèrent que le frottement pariétal devrait atteindre sa valeur de régime établi dès les premiers diamètres du canal.

Si ces résultats sont vérifiés approximativement la réalité apparaît beaucoup moins simple. Certains auteurs signalent que des dissymétries même difficilement mesurables à l'aspiration modifient le champ des vitesses et du frottement à des distances considérables de

l'entrée, suggérant une action de la couche limite initiale sur le régime établi qui la suit, donc sur les lois qui y sont utilisées. D'autres auteurs constatent l'existence d'une zone intermédiaire de réorganisation que nous nommerons zone de mélange entre l'écoulement de couche limite et le régime établi, mais sans autre précision.

Il nous a donc semblé intéressant d'effectuer une étude globale de ces différentes parties : couche limite, zone de mélange, régime établi afin de préciser l'évolution du champ dynamique le long de l'écoulement et de tenter de préciser le passage d'une zone à l'autre dans une configuration expérimentale permettant d'approcher un écoulement entre deux plans parallèles. On peut alors remarquer que si le champ pariétal des vitesses présente des propriétés d'indépendance qui font qu'on peut le prédire avec une bonne précision dans la plupart des cas (hormis les décollements), les zones extérieures, souvent appelées "zones de sillage" sont moins connues. C'est pourtant elles qui permettent l'extraction d'énergie de l'écoulement moyen et son transport vers les zones pariétales où elle est dissipée par l'action de la viscosité sous forme de chaleur.

Au cours de cette étude nous avons été amenés à nous intéresser à leur comportement et à étudier certaines idées relatives aux simplifications des équations de Navier dans ces zones de faibles gradients transversaux de vitesse. L'étude des couches limites turbulentes aux basses valeurs de Reynolds nous a conduits à proposer une nouvelle loi du champ extérieur de vitesse, utilisable également pour la représentation du champ thermique et à montrer l'existence de propriétés thermiques qui ne contredisent pas les lois asymptotiques classiques. Nous montrons l'existence de propriétés communes à l'écoulement de couche limite et de régime établi.

Enfin ceci nous a conduits à proposer un modèle de réorganisation de l'écoulement permettant de lier le champ moyen établi de vitesses aux conditions de formation de la couche limite à l'entrée du canal, en bon accord avec l'expérience.

CHAPITRE I

DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL

I - GENERALITES

La réalisation pratique d'un montage permettant l'étude d'un écoulement entre deux plans parallèles peut être approchée dans un canal rectangulaire horizontal de largeur suffisante. Les perturbations produites par les petites faces sont alors suffisamment éloignées du plan médian vertical où sont effectuées les mesures pour influencer les résultats de manière négligeable.

Des études /1/ /2/ faites dans de tels canaux de rapport largeur/hauteur : $l/D = 3,5$, montrent que ces perturbations consistent essentiellement en des écoulements secondaires d'étendue assez limitée et qu'au voisinage du plan des mesures les isovitesse prises selon une coupe transversale au canal sont déjà pratiquement parallèles aux parois.

On peut alors estimer que toute croissance du rapport l/D se traduira par une augmentation correspondante de la zone localement bidimensionnelle.

Les dimensions des sondes de mesure et la précision de leur positionnement déterminent une épaisseur minimum au montage. Cette épaisseur impose à son tour une longueur suffisante du canal pour pouvoir atteindre le régime établi.

Ces considérations font que nous avons choisi d'étudier un canal d'épaisseur $2D = 5$ cm, largeur $2l = 50$ cm, longueur $L = 4$ m.

Le rapport l/D est alors de 10, soit légèrement inférieur à celui employé par G. Comte Bellot /3/ : 13,3, mais sa plus grande longueur relative $L/D = 160$ permet de mieux se rapprocher du régime établi.

La détermination des coefficients locaux d'échange de chaleur à l'aide de plaques isothermes étant délicate et peu précise nous avons préféré employer un montage dissipant une densité de flux de chaleur uniforme ce qui peut être réalisé par une méthode électrique. Des thermocouples disposés le long des parois permettent de mesurer les températures et par suite d'atteindre la valeur du coefficient local de convection.

Les pertes de chaleur par conduction à travers la plaque peuvent être réduites par calorifugeage de la face non chauffée mais cette solution présente l'inconvénient de conduire à une valeur élevée de la constante de temps du montage. C'est pourquoi nous avons adopté la solution consistant à disposer deux chauffages symétriques de part et d'autre d'une plaque isolante située dans le plan médian du canal. Les deux faces sont alors baignées par deux écoulements d'air identiques, par suite les conditions expérimentales étant les mêmes, les répartitions de température le long de chacune d'elles seront très voisines. Le gradient de température et par conséquent le flux de chaleur à travers l'épaisseur de la plaque sont ainsi rendus négligeables sans augmentation de la constante de temps du montage.

Les considérations précédentes nous ont conduits à réaliser un montage expérimental schématisé sur la figure (1) :

une veine d'expérience (V) peut être divisée en deux canaux symétriques par le dispositif chauffant (P) placé selon son plan médian horizontal. L'air est aspiré à travers le montage par un ventilateur (a) relié au canal par un raccord (t). Cet air pénètre dans le canal à un niveau de turbulence faible à travers un collecteur (c) disposé dans un caisson muni de grilles (d).

II - DESCRIPTION DETAILLEE DU MONTAGE DYNAMIQUE

La figure (2) représente une vue du dispositif expérimental.

A - Le Collecteur

Le collecteur de profil elliptique comporte deux parties construites en tôles d'acier disposées symétriquement par rapport au plan médian horizontal du montage. Entre ces deux parties viennent se loger des pièces d'épaisseur variable dont la face interne est usinée pour que les faces verticales de l'ensemble soient bien continues et puissent se raccorder à la veine d'expérience de largeur constante et de hauteur variable.

Ce collecteur est disposé dans un caisson de $2 \times 1,50 \times 1,40 \text{ m}^3$ qui aspire l'air de la salle d'expérience à travers une toile disposée en face de celui-ci. Des grilles et une structure nid-d'abeilles en aluminium de 6 mm de maille, et 50 mm de profondeur permettent de régulariser l'aspiration en maintenant un niveau de turbulence à l'entrée du canal inférieur à 3 ‰. Deux bandes de toile émeri de 6 cm de large sont collées sur les faces supérieure et inférieure du collecteur près de l'entrée du canal. Elles sont destinées à stabiliser l'abscisse de la transition laminaire-turbulent.

B - La Veine d'Expérience

Les parois horizontales de la veine d'expérience figure (3) sont constituées chacune par deux tôles d'alliage d'aluminium (0) de 2 m de longueur, 62,5 cm de largeur et 5 mm d'épaisseur, disposées bout à bout. Pour les rigidifier on a collé transversalement tous les 12,5 cm des profilés carrés d'acier de 30 mm (1). Les renforts extrêmes permettent la fixation à l'avant au collecteur et à l'arrière au caisson de liaison au ventilateur.

31 passages numérotés $n = 1$ à 32 sont percés le long de l'axe de symétrie de la paroi supérieure tous les 12,5 cm pour permettre d'introduire les sondes de mesure dans le canal à des distances de l'entrée

x_n telles que :

$$x_n = 12,5(n - 1) \text{ cm}$$

4 autres passages disposés à 12,5 cm de part et d'autre de ceux-ci aux abscisses $x = 0$ et $x = 200$ cm permettant de vérifier la symétrie de l'écoulement par rapport au plan médian vertical.

Les faces latérales (2) déterminent l'épaisseur du canal, trois d'entre elles sont en profilés d'acier rectifié, le quatrième en plexiglas permet de voir les sondes de mesure dans la veine d'expérience. Les tiges filetées (3) reliant ces faces latérales au bâti (4) disposées tous les 100 cm permettent de maintenir la largeur intérieure du canal constante et égale à 50 cm. La plaque médiane (5) sépare la veine expérimentale en deux canaux symétriques et supporte le dispositif de chauffage. Son épaisseur est de 14,2 mm. Elle est précédée côté collecteur par un nez profilé rugueux.

L'ensemble repose sur le bâti très rigide (4) auquel il est fixé par les presses (6).

Lors des études dynamiques la plaque médiane était démontée, permettant d'avoir une hauteur de canal constante à $\pm 0,1$ mm.

C - Le raccord au ventilateur et le ventilateur

Le raccord au ventilateur comprend deux pièces indépendantes en tôle boulonnées l'une à ce dernier, l'autre à la veine d'expérience et reliées entre elles par une gaine élastique qui empêche la propagation des vibrations mécaniques.

Des croisillons de tôle de 20 cm de profondeur formant une maille carrée de 3 cm arrêtent les mouvements tourbillonnaires qui peuvent être créés par le rotor du ventilateur. Celui-ci construit par les Ets Meidinger est entraîné par un moteur CEM d'une puissance de 16 ch, permettant d'atteindre à l'entrée du canal une vitesse maximum d'environ 60 m/s.

III - LE SYSTEME DE CHAUFFAGE

Le dispositif chauffant dont une vue générale est donnée sur la figure (5) est formé de deux systèmes identiques de 75 cm de long qui constituent une partie de la plaque médiane.

Sur chacune de leurs faces supérieures et inférieures sont disposés côte à côte trois éléments chauffants de 12 cm de large. Les deux chauffages latéraux forment une garde qui prévient les pertes transversales de chaleur de la bande centrale ou chauffage principal.

Chaque élément, dont une demi-coupe est représentée sur la figure (4) comprend 16 bandes de constantan de 5 mm de large, distantes de 2,5 mm. Elles sont disposées dans une gaine constituée d'une feuille de plastique polypropylène de point de fusion assez élevé (150 °) et d'une toile isolante soudée au plastique entre chaque bande résistante. Ce support de bande est ensuite collé à une tôle d'acier inoxydable de 1 mm d'épaisseur, 12 cm de large et 75 cm de long, chargée d'uniformiser le flux de chaleur.

La détermination des températures de surface le long des éléments est faite par des thermocouples constitués par la soudure à l'arc, en milieu réducteur, de fils BTE-CTE de 0,2 mm de diamètre. La soudure obtenue est soudée à l'étain dans des trous borgnes percés dans la tôle d'inox (figure 4).

Ces éléments sont ensuite collés sur une plaque support isolante en Papalac d'épaisseur 10 mm. Ces collages ayant une souplesse suffisante, une telle construction présente l'avantage de permettre les dilatations différentielles de l'acier des bandes de constantan qui peuvent glisser dans leur gaine, et de la plaque support. On limite ainsi les contraintes et déformations qui pourraient survenir.

Les parties latérales extrêmes de cette plaque sont alors recouvertes de formica compensant l'épaisseur des éléments chauffants et recouvrant les fils de thermocouples qui débouchent latéralement à l'extérieur (figure 5). L'implantation de ces thermocouples sur les plaques chauffantes est représentée sur la figure (6). 25 d'entre eux sont disposés le long du chauffage principal supérieur et permettent la détermination du coefficient d'échange. 6 thermocouples soudés sur chaque chauffage

de garde supérieur et le chauffage principal inférieur permettent de vérifier que les fuites de chaleur latérales et transversales sont négligeables.

Les phénomènes de conduction dans une coupe transversale de la plaque ont été étudiés par analogie électrique à l'aide de papier "Teledeltos" pour les conditions expérimentales les plus défavorables.

Nous avons calculé que l'incertitude relative sur l'uniformité du flux ϕ était inférieure à 10^{-2} , alors que la différence entre la température de paroi et celle mesurée par les thermocouples était d'environ 0,04 °C donc négligeable.

CHAPITRE II

METHODES ET APPAREILLAGE DE MESURE

I - MESURES DE PRESSIONS ET DE VITESSES

Les mesures de pressions statique P_s et totale P_t ont été faites le long de l'axe du canal à l'aide d'une sonde de Prandtl double de 1,5 mm de diamètre, à nez sphérique, et muni de prises de pression statique à une distance de 7 diamètres de l'extrémité de ce nez soit 10,5 mm.

Lors d'explorations dans les couches limites turbulentes nous n'avons pas décelé de variation de la mesure de P_s , entre la zone turbulente et potentielle sauf au voisinage immédiat de la paroi. Nous n'avons donc pas fait de correction sur P_s , ni d'ailleurs sur P_t , remarquant par ailleurs que la correction proposée par Hinze /4/

$$U_m = \sqrt{\frac{P_t - P_s}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{u^2}}{U^2}}$$

donnerait le long de l'axe du canal un écart relatif de l'ordre de 10^{-3} , négligeable.

Les pressions sont mesurées avec un manomètre précis à $\pm 0,1$ mm d'eau.

Les vitesses $U_m(x)$ rapportées à la vitesse d'entrée U_e dans le canal sont alors calculées par la formule :

$$\frac{U_m}{U_e} = \frac{(P_t - P_s)_x}{(P_t - P_s)_e}$$

La vitesse d'entrée U_e est calculée classiquement à partir de la relation de Bernoulli. Les erreurs inhérentes à ce système de mesure font que l'on commettra sur U_e une erreur estimée à 2 % ; l'erreur introduite par les manomètre sera alors négligeable, sauf aux plus basses vitesses (6 m/s) où les erreurs sur U_e peuvent atteindre 5 %. De plus l'estimation du gradient de pression statique devient très difficile.

Pour faire les mesures des champs transversaux de vitesses en chaque section le long du canal, il est indispensable de connaître avec précision l'ordonnée correspondant à la valeur mesurée de la vitesse, en particulier près des parois. On sait qu'un tube de pitot cylindrique ou aplati donne des indications erronées dans de forts gradients de vitesse et les corrections proposées sont souvent contradictoires /5/ /6/ /7/ /8/.

L'utilisation du fil chaud en paroi puis du tube de pitot à l'extérieur introduit une incertitude sur la position du raccordement des mesures que nous ne pouvions accepter pour cette étude. Nous avons donc décidé de faire ces mesures uniquement par anémométrie à fil chaud, à température constante.

La chaîne de mesure employée, fabriquée par la Société Disa comporte :

. le fil chaud proprement dit et son support : pour les mesures de vitesses longitudinales nous avons employé des sondes 55 A 25 dont nous avons coudé les broches conformément aux recommandations de Van Tinh /9/.

Ces broches sont reliées par un fil de tungstène platiné de 5 μ que nous changions systématiquement toutes les cinq heures d'utilisation environ afin d'éviter les dérives liées au vieillissement et à l'empoussiérage des fils. Des sondes 55 F 14 "Série dorée" ont été employées pour faire des mesures plus précises à la paroi.

La détermination des corrélations $\overline{uv}$ était faite de manière classique avec des sondes 55 A 29 à un fil incliné à 45 ° par rapport à l'axe de la sonde.

Tous ces éléments sensibles étaient montés sur des supports coudés 55 A 28. Nous avons également utilisé des sondes en X 25 A 38 reliées à deux chaînes Disa identiques à celle décrite ci-dessous.

Ces sondes sont reliées à une unité d'asservissement ou anémomètre Disa 55 D 00 qui maintient la température du fil constante, le coefficient de surchauffe employé étant de 1,8.

Le signal électrique obtenu est envoyé dans un linéarisateur 55 D 10 qui convertit la tension d'entrée non linéaire de la forme :

$$V = V_0'^2 + BU^{1/m}$$

en une tension proportionnelle à la vitesse :

$$V_s = KU$$

Pour les sondes employées l'exposant m était toujours très voisin de la valeur $m = 2,34$ indiquée par le constructeur pour une tension $V_0' = 0,925 V_u$, V_u étant la tension de vitesse nulle sortant de l'anémomètre.

L'étalonnage des sondes était refait avant chaque série de mesure, et les réglages de compensation thermique de l'électronique, et de tension de vitesse nulle contrôlés avant d'introduire la sonde dans une nouvelle section d'expérience.

La tension moyenne est ensuite mesurée sur un voltmètre digital 55 D 30 alors que la tension efficace est lue sur un voltmètre RMS 55 D 35 muni d'une sortie analogique.

Moyennant les précautions indiquées cette chaîne permet de connaître des vitesses relatives (U_m/U_e) avec une précision que nous estimons meilleure que 1 % dans une gamme $0,5 < (U_m/U_e) < 1$, en écoulement potentiel.

La mesure précise des valeurs moyennes est par contre beaucoup plus malaisée en écoulement turbulent : l'expérimentateur ne peut estimer celle-ci que grossièrement sur un appareil à aiguille par exemple, l'emploi de réseaux capacitifs d'amortissement placés à l'entrée des voltmètres conduit à des constantes de temps des filtres trop élevées, l'obtention d'une valeur moyenne est longue alors que le fil chaud est un instrument peu fidèle, et la précision en souffre.

Nous avons donc décidé d'enregistrer les tensions continues issues du linéarisateur et du voltmètre RMS sur des appareils SEFRAM type Graphispot dont la plume est asservie optiquement à un galvanomètre de grande qualité (linéarité globale à l'enregistrement meilleure que 0,2 %). Leur constante de temps est importante (> 1 s) et l'on n'enregistre donc que les fluctuations les plus lentes du signal dont il est ensuite aisé de tirer graphiquement une valeur moyenne (figure 7).

Afin de compléter cette chaîne, nous avons construit un système de déplacement automatique de sonde. Il comprend une vis micrométrique de pas 1 mm montée sur roulements à billes qui entraîne un chariot à rattrapage automatique de jeu, permettant un positionnement des sondes à 1/100 mm sur le plan inférieur du canal. Ce positionnement de la sonde était déterminé à l'aide d'une lunette de visée à travers la face latérale en plexiglas en repérant le fil chaud et son image réfléchiée par la face inférieure de la veine.

La sonde est déplacée manuellement près de la paroi, puis entraînée automatiquement de mm en mm par un moteur électrique. Une minuterie commande cette avance toutes les 60 secondes, temps suffisant pour déterminer les valeurs moyennes en chaque point, et envoie un signal aux "Topeurs" des enregistreurs pour repérer une nouvelle mesure, et à un compteur électromécanique qui indique l'ordonnée de la sonde. Un micro-rupteur repère l'avance de la vis avec une résolution meilleure que 0,01 mm. Grâce à un tel dispositif on obtient directement le champ des

vitesse en enregistrement et on mesure avec précision les valeurs moyennes désirées. De plus cette présentation graphique permet de voir immédiatement l'apparition de défauts dans les sondes, les variations de régime et la stabilité de l'écoulement, ce qu'il aurait été difficile d'obtenir avec autant de souplesse par d'autres méthodes (multiéchantillonnage par exemple). Il nous a été particulièrement précieux lors de la mise au point de la géométrie d'entrée de la soufflerie et nous a permis d'obtenir un écoulement très stable, fondamental pour cette étude.

II - MESURES DE PROPRIETES STATISTIQUES DES SIGNAUX TURBULENTS

La chaîne décrite précédemment permet de mesurer la valeur moyenne et la valeur efficace du signal ou racine carrée du moment centré d'ordre 2 ; il serait également possible de mesurer les moments d'ordre supérieur par voie analogique /3/.

Il est également possible de mesurer directement la densité de probabilité d'amplitude des signaux de vitesse, ce que nous avons fait.

La méthode employée est la suivante : le signal dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse instantanée du fluide est échantillonné à une fréquence de 10 KHz. Chaque impulsion ainsi obtenue est convertie linéairement en une valeur variant de 0 à 99, qui charge d'une unité un canal mémoire correspondant à cette adresse.

La lecture du contenu des 100 canaux au bout d'un temps d'intégration d'environ 1 mn donne directement la loi de densité de probabilité d'amplitude du signal donc de la vitesse /10/.

L'appareillage permettant de réaliser ces opérations consiste en un échantillonneur donnant des impulsions de temps de montée 1 μ s, et un analyseur d'amplitude Intertechnique SA 15. Une tension continue étalonnée, injectée en opposition à l'entrée différentielle de l'échantillonneur, permet de supprimer une partie de la composante continue de façon à exploiter au mieux la résolution de l'analyseur.

Les valeurs obtenues en sortie du SA 15 (contenu des canaux mémoire) sont transcrites sur bandes perforées pour permettre leur traitement ultérieur sur ordinateur (IBM 1130) et déterminer les différents

moments désirés en un point.

Nous avons vérifié que le choix de la fréquence d'échantillonnage dans une gamme de 100 Hz à 10 KHz ne modifiait pas les résultats et que les valeurs des moments centrés d'ordre 2 obtenues par voie analogique (voltmètre RMS) et numérique étaient identiques.

III - MESURE DU FROTTEMENT PARIETAL

Nous avons mesuré le frottement pariétal à l'aide d'une balance de paroi qui nous a été prêtée par Monsieur le Professeur Mathieu de l'Ecole Centrale de Lyon, nous tenons à le remercier. L'appareil (figure 8) est constitué d'un plateau circulaire de 1 dm^2 lèché sur sa face inférieure par le fluide qui circule dans le canal. Il est suspendu à une potence par trois rubans d'acier, disposés de telle sorte que l'influence du gradient de pression statique soit sans action sur la position d'équilibre du plateau. Les forces de frottement provoquent un déplacement de ce dernier qui est détecté par un transformateur différentiel, un amplificateur d'asservissement injecte un courant dans une bobine, imposant au plateau une force opposée à la précédente de façon à le ramener dans sa position d'équilibre initiale. Le courant circulant dans cette bobine est alors proportionnel à la force de frottement.

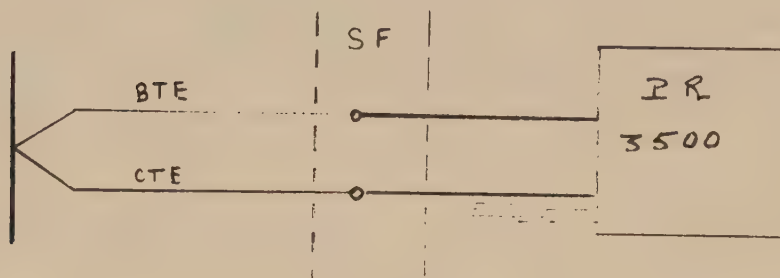
Le dispositif était cependant très sensible aux vibrations et malgré sa grande précision et sa sensibilité nous n'avons pu l'utiliser que pour mesurer des évolutions relatives du frottement le long du canal, dans une gamme très étroite du nombre de Reynolds.

IV - MESURE DES TEMPERATURES

A - Températures de paroi

Les températures sont mesurées sur les parois des plaques chauffantes avec des thermocouples BTE/CTE montés selon la disposition représentée sur la figure (6).

L'extrémité de chaque couple BTE-CTE est soudée sur des broches en laiton (SF) placées à la température de la pièce.



Les forces électromotrices produites sont mesurées à l'aide d'un potentiomètre enregistreur 24 voies Philips PR 3500 (précision 0,25 %, linéarité et reproductibilité 0,1 %) relié aux cosses de laiton par des câbles de cuivre.

Les couples laiton-cuivre ayant des potentiels thermoélectriques faibles et des températures à peu près identiques, la température mesurée sur la plaque chauffante est alors repérée par rapport à celle des broches (SF).

La loi d'étalonnage des thermocouples supposée parabolique, était déterminée relativement aux températures de la glace fondante, et de l'ébullition de l'eau et du soufre.

Les températures étaient déterminées à $\pm 0,05$ °C à l'aide d'un abaque représentant cette loi.

L'expérience montrant qu'il était impossible d'obtenir une température de salle parfaitement stable, les valeurs tirées des enregistrements rapportées à une référence fixe étaient trop dispersées. Nous avons donc finalement placé cette référence à l'air libre, permettant de déterminer les températures par rapport à l'air à mieux que $\pm 0,1$ % °C. Les différences de températures étaient alors mesurées à mieux que $\pm 0,2$ °C ; la température ambiante étant elle repérée sur un thermomètre à mercure précis à $\pm 0,2$ °C.

Compte-tenu des écarts de température relativement faibles (20 °C) que nous mesurons, (afin de rester aussi près que possible du cas d'un fluide à propriétés physiques constantes), on peut estimer que ces incertitudes correspondent à une erreur de l'ordre de 1 % sur les mesures faites sur une distance correspondant à environ 80 % de la longueur de la plaque chauffante.

B - Couches limites thermiques

Les champs de températures moyennes au dessus de la plaque chauffante ont été faits avec une sonde constituée de deux fils BTE-CTE de 0,1 mm de diamètre, soudés bout à bout.

Les tensions, mesurées par rapport à une soudure froide placée dans la même section à l'extérieur de la couche limite thermique, étaient reliées aux bornes d'entrée d'un amplificateur différentiel à faible bruit Tranchant TX 100, puis enregistrées sur un "Graphispot" selon une technique déjà décrite.

V - MESURE DE LA DENSITE DE FLUX DE CHALEUR - COEFFICIENT D'ECHANGE

Nous avons indiqué précédemment que le chauffage était constitué par des rubans de constantan de 5 mm de large distants les uns des autres de 2,5 mm, montés en série. Le flux de chaleur dissipé par effet Joule dans un élément de 1 cm de longueur sera donc évacué par convection et rayonnement à travers une surface de 0,75 cm².

Des mesures préliminaires au pont de Thomson sur des échantillons de rubans de 1 m ont permis de déterminer leur résistance soit par cm 0,613.10⁻² W/cm.

L'erreur commise étant inférieure à 0,2 %, la densité de flux de chaleur ϕ a alors pour valeur :

$$\phi = \frac{0,613}{0,75} 10^{-2} I^2 \text{ W/cm}^2 = 0,817.10^{-2} I^2 \text{ W/cm}^2$$

Le courant est fourni par des alimentations stabilisées en intensité à mieux que 10^{-3} , mesurée avec un ampèremètre digital (précision 10^{-3}).

Les répartitions expérimentales de températures obtenues prouvent que les passages de chaleur à travers l'épaisseur et selon la largeur du modèle sont effectivement négligeables. Seul un phénomène de conduction longitudinale, lié à la répartition des températures imposée par l'évolution du coefficient de convection va alors exister. Il peut être calculé à partir de la loi expérimentale des températures de parois. Ses effets sont négligeables sauf dans une zone peu importante très proche du début du chauffage.

L'erreur sur la détermination du flux de chaleur étant de l'ordre de 1 %, celle sur les températures également de 1 %, l'incertitude sur les mesures de coefficient d'échange local sera alors de 2 %.

CHAPITRE III

ETUDE EXPERIMENTALE DU CHAMP MOYEN DES PRESSIONS ET DES VITESSES LE LONG DU CANAL

I - MISE AU POINT DU MONTAGE - INFLUENCE DE LA GEOMETRIE D'ENTREE

L'objet de cette étude étant l'évolution du champ des vitesses le long d'un canal jusqu'au régime établi, il nous a semblé impératif d'avoir un écoulement à l'entrée du canal le moins perturbé possible afin de mesurer le développement de couches limites créées dans des conditions initiales bien connues.

L'expérience montre que si l'on veut obtenir un écoulement symétrique la géométrie d'entrée a une très grande influence sur l'évolution des couches limites et il s'en suit une mise au point délicate.

Ces difficultés ont conduit les expérimentateurs qui ont recherché cette condition de symétrie à utiliser divers procédés. Certains consistent à disposer à l'entrée même du canal un "nid d'abeilles" pour imposer une direction constante au vecteur vitesse /3/, ou un "lit de pointes denses" /11/ pour détruire le champ des vitesses qui s'est développé en amont de celui-ci par un mélange turbulent artificiel.

Malheureusement ces deux dispositifs introduisent également des perturbations que nous voulons éviter. Il est également possible de tenter d'aspirer la couche limite qui s'est développée le long des faces du collecteur qui précède le canal, mais les auteurs /12/ qui ont utilisé cette technique soulignent que le réglage de l'aspiration est très difficile et la précision des mesures en souffre. Enfin si l'on désire obtenir un régime établi sur un canal relativement court on peut provoquer un décollement à l'entrée du canal soit en supprimant le collecteur /13/ soit en disposant un divergent en amont du canal /59/. L'écoulement étant alors entièrement turbulent dans la section d'entrée, il devient impossible d'étudier une transition couche limite - régime établi. De plus des perturbations très faibles de l'aspiration, non mesurables en général peuvent toujours provoquer des dissymétries du régime établi /13/ /14/.

Pour la mise au point de notre montage nous avons également rencontré des difficultés. Nous avons représenté sur la figure (9) l'évolution, le long du canal, des courbes isovitesses réduites $(U/U_m)_x = Cte$ obtenues avec une seule grille disposée devant l'entrée du collecteur elliptique. La transition était assurée en paroi à l'entrée du canal par une bande de toile émeri de 6 cm de profondeur (3 M grain moyen), la turbulence de l'air était de 3 % à l'entrée du canal.

Nous avons alors remarqué (figure 9) que deux couches limites différentes se développent sur les grandes faces du canal, qu'elles se rejoignent puis que se produit une oscillation de la zone de maximum de vitesses entre les deux plans jusqu'à obtention d'un régime où les isovitesses semblent parallèles à la paroi, mais disposées de façon dissymétrique, résultat confirmé par l'étude de Burgaud /15/ pour des géométries d'entrée différentes.

La longueur de notre canal ne permet pas de mieux préciser l'évolution de ces isovitesses, mais Fourcher /16/ opérant dans un canal rectangulaire rempli d'eau, a trouvé qu'un tel écoulement dissymétrique se retrouvait à une distance de l'entrée du canal aussi éloignée que $x/D = 400$. Enfin Alcaraz /17/ nous a signalé qu'il avait trouvé que ces dissymétries sont liées à des dissymétries du frottement pariétal.

Par la suite, nous avons été conduits à disposer une seconde grille à mi-distance entre l'entrée et la sortie du collecteur ce qui ne modifiait pas l'intensité de turbulence de l'air : 3 ‰, à l'entrée du canal. Un "nid d'abeilles" a été placé devant la première grille d'entrée du collecteur, qui a été lui-même placé dans un caisson de bois et dont l'ouverture est recouverte d'une toile. Dans ces conditions le champ des vitesses est symétrique tout au long du canal mais assez perturbé (nous entendons par là qu'on trouve des fluctuations de vitesse de fréquence très faibles rendant délicate la détermination des valeurs moyennes). Nous avons enfin tendu des toiles entre les bords du collecteur et les bords du caisson en bois et la figure (7) représente l'amélioration obtenue par cette modification.

La suite des mesures a été faite avec cette géométrie d'entrée consistant en un dispositif de rapport de contraction très important amenant un air d'une vitesse pratiquement nulle à la vitesse voulue et dans lequel des pertes de charge singulières engendrées par des grilles et des "nids d'abeilles" lui imposent une direction constante et atténuent les irrégularités d'alimentation d'air même infimes qui peuvent exister dans la salle d'expérience, tout en conservant à l'entrée du canal une intensité de turbulence relativement basse (3 ‰).

II - RESULTATS EXPERIMENTAUX - GENERALITES

Quatre séries de mesures ont été faites le long du canal avec cette nouvelle géométrie, pour des vitesses d'entrée de :

$$U_g = 49,5 \quad , \quad 22,5 \quad , \quad 12,5 \quad , \quad 6,5 \quad \text{m/s}$$

correspondant à des valeurs du nombre de Reynolds $Re = U_g D/v$ de 86 000, 39 000, 22 000, 11 000.

L'écoulement était turbulent dès l'entrée du canal pour les trois valeurs les plus élevées de Re . Pour la plus faible, la zone turbulente était précédée d'une partie laminaire qui occupait environ le premier quart du canal.

III - EVOLUTION DES PRESSIONS LE LONG DE L'AXE DU CANAL

L'évolution des pressions le long du canal est représentée pour les trois valeurs les plus fortes de Re sur la figure (10) et la figure (11).

A - Pression statique $P_s(x)$ (figure 10)

La loi d'évolution de la pression statique $P_s(x)$ le long du canal présente, pour chaque vitesse d'entrée deux parties sensiblement linéaires. Le gradient longitudinal dans la seconde zone ($x/D > 95$) apparaît toujours légèrement plus faible que celui de la première.

Remarque : On peut remarquer sur les résultats correspondants obtenus par G. Comte-Bellot /3/ que le gradient ne devient constant qu'au-delà de $x/D = 30$ (ce qui peut être causé par les perturbations créées par un "nid d'abeilles" situé à l'entrée même du canal), et que le changement de valeur du gradient se ferait pour $x/D = 60$. Cependant, tenant compte de la dispersion des points expérimentaux, il est possible de considérer ces gradients constants jusqu'à $x/D = 90$ puis évoluant seulement très légèrement ensuite ce qui s'accorde mieux avec nos résultats obtenus sur un montage relativement plus long ($x/D = 160$ contre $x/D = 120$).

B - Pression totale $P_t(x)$ (figure 10)

Elle est constante dans la zone amont du canal où l'écoulement central peut être considéré comme potentiel ($x/D \approx 50$) et on ne remarque pas d'évolution sensible de la longueur de cette zone avec Re .

C - Pression dynamique $P_d(x) = (P_t - P_s)_x$ (figure 11)

Elle est proportionnelle au carré de la vitesse maximum en chaque section. Elle croît à peu près linéairement jusqu'à ($x/D \approx 50$), passe par un maximum en $x/D \approx 85$ et devient à peu près constante pour $x/D > 130$.

IV - CHAMP DES VITESSES LE LONG DU CANAL

Le champ des vitesses en différentes sections le long du canal était mesuré au fil chaud pour les quatre valeurs de Re indiquées.

Les résultats sont présentés sous forme numérique sur les tableaux (1) à (7) et repérés par le numéro de la section où ils ont été mesurés.

Nous avons représenté sur les figures (12) à (15) l'évolution le long du canal des lignes joignant dans le plan (x,y) des mesures les points correspondant à une valeur constante du rapport $(U(x,y)/U_m(x)) = Cte = U^*$ que nous appellerons "isovitesses réduites".

On distingue dans la partie amont $x/D < 60$ une zone de développement des couches limites pour laquelle la pression totale est constante dans l'axe du canal et où les isovitesses réduites s'éloignent de la paroi ($x/D < 80$).

Cette zone s'étend un peu plus loin pour $Re = 11\ 000$ à cause de l'existence d'une zone laminaire à l'entrée du canal ($x/D < 30$) et on peut remarquer que la zone de transition s'étend entre $30 < x/D < 60$ en accord avec les prévisions théoriques /45/.

Au-delà le noyau potentiel disparaît et le fluide turbulent a envahi tout le canal provoquant un réarrangement du champ des vitesses. La comparaison des figures (11) et (12) montre que la décroissance de $U_m(x)$ constatée pour $x/D > 85$ correspond à une perte de matière de la zone centrale vers la paroi qui se caractérise par un rapprochement des isovitesses réduites de ces parois, nous appellerons cette région "zone de mélange".

Enfin ($x/D > 130$) les isovitesses réduites se confondent avec des isovitesses vraies et l'on est très proche d'un champ de vitesse établi.

V - INFLUENCE DES PETITES FACES DU CANAL

Dans la partie aval du montage, en régime établi, les isovitesses deviennent parallèles à l'axe du canal et l'on peut définir

dans le plan (x,y) des mesures une vitesse de débit U_d indépendante de x, par intégration du champ des vitesses de sorte que :

$$U_d = \int_0^1 U(y) d(y/D)$$

Elle devrait être égale à la vitesse d'entrée du canal si l'écoulement était strictement bidimensionnel et le champ de vitesse uniforme à l'entrée.

En réalité le long des petites faces du canal se sont développées des couches limites tridimensionnelles, liées à des écoulements secondaires /2/, /18/. Celles-ci sont suffisamment éloignées de la zone centrale et modifient peu les caractéristiques locales turbulentes du fluide dans le plan (x,y) des mesures /3/.

Toutefois leur croissance a pour effet une augmentation de débit du fluide dans la zone centrale si bien que la vitesse U_d est supérieure à la vitesse de débit près de l'entrée du canal. Il est alors indispensable de tenir compte de ces variations pour déterminer les coefficients locaux de frottement.

Si nous supposons que ce flux de masse créé par les petites faces du montage n'affecte pas les représentations $U(y)/U_m^* = U^*(x,y)$, on peut étudier l'importance de ces transferts de matière en comparant l'évolution des vitesses maximales $U_m(x)$ mesurées le long du plan (x,y) aux vitesses théoriques U_m^t que l'on calcule en supposant la vitesse de débit constante et égale à U_d de sorte que :

$$U_m^t(x) \int_0^1 U_{(x,y)}^* \cdot d(y/D) = U_d$$

A l'entrée du canal, si l'on suppose le champ de vitesse uniforme

$$\int_0^1 U^*(0,y) d(y/D) = 1$$

et alors d'après nos notations la vitesse théorique à l'entrée du canal serait :

$$U_m^t(0) = U_e^t = U_d$$

Les évolutions respectives des rapports $U_m(x)/U_e$ mesurés (symboles blancs) et $U_m^t(x)/U_e^t$ déterminés par intégration des champs de vitesse (symboles noirs) sont représentés sur la figure 16.

On remarque qu'en $x/D = 145$ prise comme section de référence les valeurs U_m/U_e et U_m/U_e^t sont pratiquement identiques, et donc que $U_e \simeq U_e^t$, cette coïncidence nous semble fortuite et provoquée par la non uniformité du champ de vitesses à l'entrée du canal (la valeur U_e apparaissant trop forte à cause des couches limites créées le long des faces du collecteur et des bandes émeri de transition). Elle permet cependant de comparer directement les évolutions des vitesses réelles et des vitesses théoriques en écoulement strictement bidimensionnel, qui donneraient une même vitesse maximum U_m en $x/D = 145$.

On constate alors qu'au niveau des sections (2), (3), (5) ... ($x/D = 5, 10, 20$) où l'on a une bonne connaissance des vitesses, U_m^t est en moyenne supérieur de 3 % à $U_m = Re = 86\ 000$ et $39\ 000$, de 1,5 % seulement pour $Re = 22\ 000$. Cet écart va ensuite en diminuant le long de la couche limite jusqu'en $x/D = 60$, à cause du flux de matière transversal qui provoque une augmentation relative de $U_m(x)$.

Dans la zone de mélange les écarts entre U_m^t et U_m tendent d'abord à augmenter, surtout pour $Re = 39\ 000$ et $22\ 000$ et atteignent 2 à 3 %. Ils décroissent ensuite et deviennent nuls en $x/D = 145$, mais on remarque que les gradients de $U_m^t(x)$ sont plus importants que ceux de $U_m(x)$, on peut donc penser que dans un écoulement strictement bidimensionnel, la réorganisation de la zone de mélange est plus marquée que ce que nous avons constaté expérimentalement.

L'observation des propriétés d'oscillation de la zone de mélange étudiées en écoulement dissymétrique permet de proposer l'explication suivante : lors de la jonction des couches limites les zones latérales sont plaquées sur les parois provoquant une perte de matière

dans la région centrale, puis en se redéveloppant provoquent un flux de matière vers le centre qui limite la décroissance de la vitesse $U_m(x)$.

VI - DETERMINATION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT LE LONG DU CANAL

Le coefficient de frottement pariétal peut être déterminé à partir de l'équation d'Euler en faisant le bilan des forces et des quantités de mouvement

$$\sum \vec{F}_e = \iint_S \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

$$- \tau_p - D \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^D \rho U^2 dy$$

En régime établi cette expression se réduit à

$$\tau_p = - D \frac{dP}{dx}$$

En couche limite, dans l'écoulement potentiel, la pression est liée à la vitesse par la relation de Bernoulli

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{U_m^2}{2} \right)$$

$$\tau_p = \frac{D}{2} \frac{d}{dx} \left[U_m^2 - 2 \int_0^1 \rho U^2 d\left(\frac{y}{D}\right) \right]$$

et le coefficient local de frottement rapporté à la vitesse d'entrée

U_e devient :

$$C_f(x) = \frac{\tau_p}{\frac{\rho U_e^2}{2}} = \frac{d}{d(\frac{x}{D})} \left[\left(\frac{U_m}{U_e} \right)^2 - 2 \int_0^1 \left(\frac{U}{U_e} \right)^2 d\left(\frac{y}{D}\right) \right]$$

Nous avons mesuré le coefficient $C_f(x)$ à l'aide de cette formule en prenant l'évolution U_m^t/U_e^t correspondant à un écoulement bidimensionnel.

L'évolution des quantités

$$\left[\frac{U_m^t}{U_e^t} \right]^2 - 2 \int_0^1 \left(\frac{U}{U_e} \right)^2 d\left(\frac{y}{D}\right)$$

est représentée en couche limite sur la figure (17).

La détermination des pentes, permettant de calculer C_f a été faite en tenant compte du phénomène suivant : aux basses vitesses nous avons remarqué que d'une expérience à l'autre et dans des conditions expérimentales apparemment identiques, la couche limite turbulente pouvait se déplacer le long du canal. Ce phénomène est particulièrement net pour $Re = 22\ 000$. Le champ des vitesses dans la couche limite a été déterminé en deux séries de mesures $0 < \frac{x}{D} < 35$ et $\frac{x}{D} > 40$ et l'on constate que la couche limite s'est déplacée de $\Delta x/D \approx 2,5$. La même remarque peut être faite pour $Re = 39\ 000$ où l'on mesure l'écoulement dans les sections 2, 3, 4, 5, 7 (sup.) puis 6, 7, 9, 11, 13, 15 (inf.). L'écart est moins important que le précédent ($\Delta x/D < 1$), il semble qu'il soit causé par le déplacement du point de transition laminaire turbulent, malgré l'existence de la bande rugueuse de transition, placée à l'entrée du canal.

Cet exemple montre la nécessité de faire les mesures aussi rapidement que possible (sans perte de précision). La détermination de C_f par un calcul portant sur l'ensemble des points expérimentaux donnerait en effet des résultats difficiles à exploiter.

Dans la zone de mélange la relation de Bernoulli entre vitesse et pression n'est plus applicable ; la correction de non bidimensionnalité ne peut être faite et les dérivées tirées des valeurs expérimentales sont très imprécises, aussi avons-nous préféré utiliser un tube de Preston /6/ étalonné en régime établi : on détermine l'évolution du frottement à partir de la connaissance du champ de vitesse, en supposant l'existence d'une loi universelle de paroi le long du canal, ce que nous avons vérifié. Enfin ces résultats ont été corroborés pour les deux valeurs intermédiaires Re par des mesures absolues du frottement pariétal à l'aide d'une balance de paroi placée dans la zone de couche limite et de régime établi.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure (18). Le frottement en écoulement turbulent, important à l'entrée du canal, décroît et tend rapidement vers une valeur constante en couche limite. Il croît ensuite dans la zone de mélange d'environ 8 % pour tendre vers une nouvelle valeur en régime établi. Pour $Re = 11\ 000$ la zone turbulente est précédée d'une partie laminaire où C_f est faible, puis croît très rapidement pendant la transition.

VII - CONCLUSION

L'étude d'un écoulement bidimensionnel symétrique entre deux demi-plans fait donc apparaître trois domaines distincts :

- dans la partie amont, deux couches limites se développent le long des deux demi-plans en créant un gradient positif de vitesse dans la région centrale où subsiste un noyau potentiel.
- ces couches limites se rejoignent dans la "zone de mélange" d'une longueur sensiblement égale à la précédente et l'on a une réorganisation de l'écoulement. Les vitesses diminuent dans la région centrale tandis qu'elles augmentent près des parois de manière à obtenir la conservation du débit masse.

- ce champ de vitesse tend enfin vers une loi indépendante de la distance à l'origine du canal (régime établi).

Le gradient de pression statique varie très peu le long du canal. L'influence du nombre de Reynolds sur la longueur permettant d'atteindre le régime établi est difficile à mettre en évidence ; la croissance plus rapide des couches limites turbulentes aux bas Re étant compensée par l'augmentation de longueur d'une zone de couche limite laminaire dont le développement est plus lent.

Enfin contrairement à ce que proposent certains auteurs /19/, /3/, le frottement pariétal n'atteint pas sa valeur de régime établi dès les premiers diamètres du canal : il tend effectivement rapidement vers une première valeur constante en couche limite mais augmente d'environ 8 % en zone de mélange avant de tendre vers une valeur constante dite de régime établi ($x/D > 130$). Le gradient de pression statique étant pratiquement constant dès l'entrée du canal, cet écart entre frottement en couche limite et en régime établi est causé dans la première zone par le gradient positif du flux de quantité de mouvement que nous avons pu mettre en évidence grâce à la stabilité de l'écoulement le long du canal.

Nous pouvons préciser dès maintenant que si l'on admet que le champ turbulent de vitesse peut être représenté entièrement par une loi universelle "de paroi" $U^+ = f(y^+)$, on ne peut faire apparaître, d'après l'étude théorique de Deissler /19/ /20/ ni la phase de réorganisation du champ de vitesse ni l'augmentation du frottement pariétal qui lui est liée.

En réalité, on sait que cette loi $U^+ = f(y^+)$ n'est utilisable que près de la paroi et qu'au delà on doit utiliser une autre loi dite "de sillage". On peut donc penser que la modification du frottement pariétal mesuré est provoquée par l'évolution de cette zone de sillage dans laquelle se font les échanges de quantité de mouvement. C'est donc essentiellement cette région dont nous nous proposons d'étudier l'évolution le long du canal. Des études faites précédemment /21/, montrent qu'il existe deux lois de sillage différentes pour la couche limite et

le régime établi, mais sans préciser la relation qui les lie. La seconde loi est pourtant issue de la réorganisation de la première et semble bien en dépendre comme le suggère l'étude initiale faite sur des écoulements dissymétriques.

CHAPITRE IV

REPRESENTATIONS DU CHAMP DES VITESSES LE LONG D'UN CANAL EN ECOULEMENT TURBULENT INCOMPRESSIBLE

I - LOIS TIREES DE L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

Considérons un canal de demi-hauteur D , de longueur x , largeur indéfinie (écoulement bidimensionnel) parcouru par un fluide de masse volumique ρ , de viscosité μ .

A l'abscisse x , à une distance y de la paroi la vitesse du fluide est $U(y)$. Choisissons enfin pour vitesse de référence la vitesse de frottement $u_f = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ dont on sait que le champ $U(y)$ en x dépend directement, au moins au voisinage de la paroi (*).

La vitesse $U(y)$ sera alors liée aux grandeurs caractéristiques du montage et du fluide par une expression de la forme :

$$F(U, y, x, D, \rho, \mu, u_f) = 0$$

(*) Ce choix d'une vitesse de référence u_f est uniquement guidé par des considérations expérimentales. Il serait également possible de choisir la vitesse U_m en $y = D$, ou la vitesse de débit, mais le domaine d'application des relations simplifiées que l'on peut trouver semble alors expérimentalement plus réduit.

que l'on peut contracter sous forme de paramètres adimensionnels en

$$F\left[\frac{U}{u_f}, \frac{yu_f}{v}, \frac{y}{x}, \frac{y}{D}\right] = 0 \quad 1$$

et l'on cherchera à étudier les formes simplifiées prises par cette expression dans le cas où les différents paramètres tendent vers des valeurs limites constantes qui permettent de négliger leur influence :

A) La distance x de l'entrée du canal est grande devant sa hauteur D

Dans ce cas comme $y/D < 1$ le terme en y/x tend vers une valeur constante nulle et l'on aura la relation :

$$F\left[\frac{U}{u_f}, \frac{yu_f}{v}, \frac{y}{D}\right] = 0 \quad 2$$

correspondant au régime établi pour lequel le champ des vitesses est indépendant de la distance à l'entrée du canal.

B) La hauteur D est grande devant l'épaisseur de couche limite δ et devant l'échelle de longueur v/u_f .

Si δ est l'épaisseur de la couche limite, l'expérience montre que δ reste toujours faible devant x, comme $y/\delta < 1$ et $\delta/D \approx 0$, on négligera le terme en y/D et on aura une relation :

$$F\left[\frac{U}{u_f}, \frac{yu_f}{v}, \frac{y}{x}\right] = 0 \quad 3$$

correspondant au développement d'une couche limite le long d'une plaque plane sans gradient de pression.

δ étant également fonction de x , on a tendance à considérer plutôt la relation établie pour $x \ll D$

$$F\left[\frac{U}{u_f}, \frac{yu_f}{v}, \frac{y}{\delta}\right] = 0 \quad 4$$

plus semblable à la précédente bien que δ et D aient des rôles bien différents.

C) Ecoulement au voisinage de la paroi

Considérons maintenant l'écoulement au voisinage immédiat de la paroi, on a alors $y/D \rightarrow 0$ et $y/x \rightarrow 0$ pour $x > x_0$ (x_0 étant donné), et $v/u_f \ll \delta$.

Il reste alors la relation

$$F\left[\frac{U}{u_f}, \frac{yu_f}{v}\right] = 0 \quad 5$$

Pour un fluide donné (ρ, μ) l'écoulement le long d'un canal au voisinage de la paroi ne dépend que de paramètres locaux u_f, y .

On écrit en posant

$$\begin{aligned} U^+ &= \frac{U}{u_f} & y^+ &= \frac{yu_f}{v} \\ U^+ &= f(y^+) \end{aligned} \quad 6$$

et pour D et u_f fixés on peut remarquer que le domaine de validité de cette approximation devrait diminuer quand x va décroître.

D) Représentation du champ extérieur des vitesses

Dans les zones extérieures (y/δ ou $y/D \approx 1$) des considérations semblables ne permettent plus de simplifier l'expression générale. On peut

cependant étudier une loi déficitaire

$$\frac{U_m - U}{u_f} = F\left[\frac{y}{x}, \frac{yu_f}{v}, \frac{y}{D}\right] = U_m^+ - U^+$$

qui se simplifie comme indiqué précédemment en une loi de couche limite :

$$\frac{U_m - U}{u_f} = F_1\left[\frac{y}{\delta}, \frac{yu_f}{v}\right] \quad 7$$

et une loi de régime établi :

$$\frac{U_m - U}{u_f} = F_2\left[\frac{y}{D}, \frac{yu_f}{v}\right] \quad 7'$$

L'étude expérimentale de ces relations montre alors /22/ /23/ que dans les zones extérieures on peut difficilement mettre en évidence l'influence du paramètre (nombre de Reynolds) $y u_f / v$ représentant le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Les premières étant importantes, l'action de la viscosité est négligeable dans cette région, ce que nous confirmerons ultérieurement.

On obtient alors un assez bon regroupement des résultats par des lois de la forme :

$$U_m^+ - U^+ = F_1\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{en couche limite} \quad 8$$

$$\text{et} \quad U_m^+ - U^+ = F_2\left(\frac{y}{D}\right) \quad \text{en régime établi} \quad 8'$$

II - CARACTERE ASYMPTOTIQUE DE CES LOIS

Dans les trois premiers cas les représentations proposées sont valables quand les paramètres négligés tendent vers des valeurs constantes nulles. Fortier /24/ dans sa "théorie asymptotique de la couche limite turbulente" montre que la loi déficitaire peut être également considérée comme une forme asymptotique quand le nombre de Reynolds devient très grand.

III - LOIS CLASSIQUES DE VITESSE ET DE FROTTEMENT

Au voisinage de la paroi, le champ de vitesse ne dépend que de la distance à la paroi par un paramètre y^+ qui fait intervenir l'action de la viscosité par les conditions aux limites

$$\text{soit :} \quad U^+ = f(y^+) \quad 6$$

Alors que si Re est assez grand on aura dans la zone extérieure :

$$\begin{aligned} U_m^+ - U^+ &= F(y/\delta) && \text{pour } D \gg x \\ \text{ou} \quad U_m^+ - U^+ &= F(y/D) && \text{pour } x \gg D \end{aligned}$$

On peut supposer que ces deux lois (6) et (8) ont un domaine commun de validité, c'est-à-dire où les forces d'inertie sont prépondérantes bien que la longueur caractéristique du phénomène soit encore la distance à la paroi. Les analyses de Millikan /25/ puis de Clauser /26/ conduisent à représenter le champ de vitesse dans cette zone par une loi logarithmique

$$U^+ = A \log y^+ + B \quad 9$$

$$U_m^+ - U^+ = -A \log y/\delta + C \quad D \gg x \quad 10$$

$$U_m^+ - U^+ = -A \log y/D + C' \quad x \gg D \quad 10'$$

Ces lois étant universelles les valeurs de A, B resteront inchangées le long du canal, les valeurs C et C' établies pour la couche limite et le régime établi seront inchangées dans leur domaine de définition mais pas nécessairement égales et nos résultats montrant que C' est plus faible que C (figure 23).

L'élimination de U^+ entre les deux relations précédentes permet alors d'obtenir la loi de frottement. (Nous considérerons seulement le cas de la couche limite, les lois du régime établi se faisant en permettant δ et D, C et C').

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \log R_\delta^+ + (B + C)$$

en posant $R_\delta^+ = \delta u_f / \nu$.

Soit :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \log R_\delta \sqrt{\frac{C_f}{2}} + B + C \quad 11 \quad R_\delta = \frac{\delta U_m}{\nu}$$

$$\text{ou encore} \quad R_\delta = \sqrt{\frac{2}{C_f}} e^{\frac{1}{A} \left[\sqrt{\frac{2}{C_f}} - E \right]} \quad 11' \quad E = B + C$$

Comme on a posé : $u_f = \sqrt{\frac{C_f}{2}} U_m$

La loi déficitaire peut encore s'écrire :

$$\frac{U_m - U}{U_m} = \sqrt{\frac{C_f}{2}} f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

soit encore

$$\frac{U}{U_m} = 1 - \sqrt{\frac{C_f}{2}} f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

D'après (11) si $Re \rightarrow \infty$, $C_f \rightarrow 0$ et $dC_f/dRe \rightarrow 0$.

On a des champs d'expérience de plus en plus grands pour lesquels on pourra supposer que C_f reste constant. On aura alors dans cette zone :

$$\frac{U}{U_m} = h\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad 12$$

forme que l'on aurait pu obtenir en prenant U_m comme vitesse de référence (la loi asymptotique de frottement prend alors une forme en Re^{-n} /25/ et l'on pourrait montrer que cette représentation est également une forme asymptotique quand $Re \rightarrow \infty$).

Cette loi h est souvent prise sous une forme puissance :

$$U/U_m = (y/\delta)^m \quad 13$$

Hegge-Zijnen /27/, Burgers /28/ et Nikuradse /29/ ont bien trouvé que m décroît en fonction de Re .

Restant dans les conditions de validité de la représentation en $U/U_m = h(y/\delta)$ nous avons alors /30/ pour la couche limite

$$\delta_1 = A_1 \delta \quad \delta_2 = A_2 \delta$$

comme

$$\tau = Cte = \rho U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} = A_2 \rho U_e^2 \frac{d\delta}{dx}$$

on obtient :

$$\frac{d\delta}{dx} = Cte$$

$$\delta = ax + b = A(x + x_0)$$

x_0 étant fonction de Re .

Soit :
$$\frac{U}{U_m} = h \frac{y}{a(x + x_0)} \quad 14$$

Les isovitesse forment un faisceau de droites dont l'origine a une ordonnée nulle, ce qui est conforme aux résultats expérimentaux obtenus par Mouton /31/ le long d'une plaque plane lisse sans gradient de pression. Nous pouvons également préciser qu'en fonction des hypothèses faites précédemment son domaine d'utilisation s'étend à la zone de validité de la forme déficitaire quand le coefficient de frottement évolue suffisamment lentement pour qu'on puisse le considérer comme constant dans un domaine expérimental non négligeable ce que l'on atteindra aux fortes valeurs de Re .

IV - ETUDE EXPERIMENTALE DES LOIS DE PAROIS LE LONG DU CANAL

A - Influence de la distance x à l'entrée du canal

Le champ transversal des vitesses le long du canal est représenté sur la figure (19) dans un diagramme $U^+ = f(y^+)$ pour différentes valeurs de Re en couche limite et en régime établi. La vitesse de frottement u_f évoluant peu le long du canal, à une même valeur de $y^+ = y u_f / \nu$ ne correspondra pour chaque vitesse d'entrée qu'une faible variation de y/D dont nous négligeons l'influence. On constate effectivement dans la partie la plus proche de la paroi l'existence d'une loi pariétale que l'on peut considérer comme étant indépendante de x , les écarts relatifs que l'on peut mesurer d'environ 1,5 %, sont de l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur le calcul de u_f en couche limite relativement à u_f en régime établi par le bilan de quantité de mouvement.

On peut également trouver une zone d'évolution logarithmique dont le domaine de validité semble augmenter avec x et est maximum en régime établi ; mais il est impossible de déterminer avec précision sa limite extérieure.

B - Influence de la vitesse d'entrée

La figure (20) représente les lois de paroi obtenues en régime établi, où le paramètre en y/x est négligeable, pour les différentes vitesses d'entrée.

Les lois de parois sont légèrement différentes, montrant l'influence du paramètre de similitude en y/D , qui dans la zone logarithmique où

$$U^+ = A \text{ Log } y^+ + B$$

9

se traduit par une augmentation de A et une diminution de B.

La variation de A constatée expérimentalement peut être expliquée si l'on peut expliciter l'influence du paramètre de similitude en y/D sur les grandeurs qui permettent de déterminer le champ des vitesses dans la zone logarithmique.

Dans celle-ci la viscosité peut être considérée comme négligeable et suivant Hinze /4/, on peut définir un coefficient de diffusivité turbulente v_t dont l'intensité sera proportionnelle à la vitesse de frottement $u_f = \tau_p / \rho$ et à la distance à la paroi y :

$$v_t = \chi y u_f$$

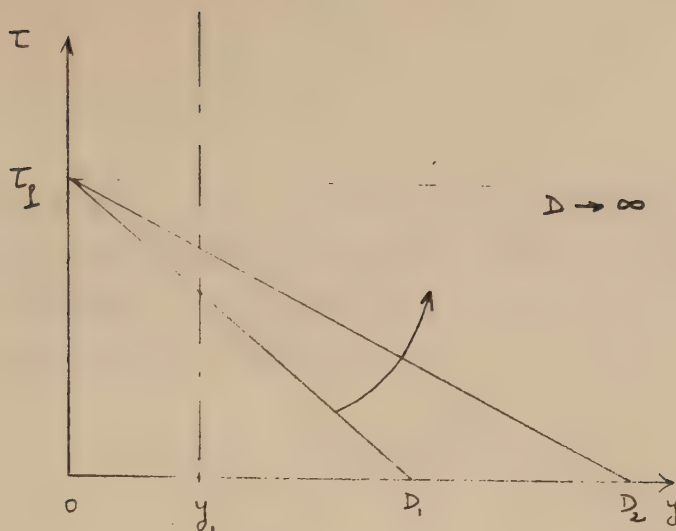
Le gradient de vitesse est alors tel que

$$\frac{\tau}{\rho} = v_t \frac{dU}{dy} = \chi y u_f \frac{dU}{dy}$$

Introduisons les grandeurs de paroi U^+ et y^+

$$\frac{\tau}{\rho} = \chi y^+ \frac{dU^+}{dy^+}$$

Pour mettre en évidence l'influence du paramètre y/D considérons l'écoulement turbulent entre deux plans (distance $2D$) et étudions la zone pariétale dans laquelle on supposera τ_p constant, $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{Cte}$ donc $u_f = \text{Cte}$, alors y^+ et y restent proportionnels. Faisons alors évoluer Re_D^+ c'est-à-dire D (figure ci-après).



On voit que si D est très grand le frottement local dans une zone de paroi $0 < y < y_1$

$$\tau(y) = \tau_p (1 - y/D)$$

est pratiquement constant ; par contre aux bas Re_D^+ on doit tenir compte de ses variations ; on a alors

$$\frac{\tau(y)}{\rho} = (1 - y^+/D^+) u_f^2 = \chi y^+ \frac{dU^+}{dy^+} u_f^2$$

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1 - y^+/D^+}{\chi y^+}$$

$$U^+ = \frac{1}{\chi} \text{Log } y^+ - \frac{1}{\chi D^+} y^+ + B$$

B étant la vitesse en $y^+ = 30$, début de la zone logarithmique.

On voit que lorsque $Re \rightarrow \infty$ on trouve la loi asymptotique classique. Par contre quand Re devient faible le terme en $(1/\chi D^+) y^+$ n'est plus négligeable. Pour un même y^+ on aura une valeur plus faible de U^+ , donnant l'illusion de diminution de $A = 1/\chi$ en représentation logarithmique.

L'utilisation d'une loi de diffusion valable jusqu'à la paroi doit permettre de prévoir une évolution de la loi $U^+ = f(y^+)$ en

fonction de Re . Pour cela nous avons fait le calcul numérique du champ pariétal des vitesses en tenant compte des variations de $\tau(y)$ et supposant que dans la "buffer-layer" le coefficient de diffusion s'amortit exponentiellement /32/ soit

$$v_t = \chi \left[1 - \exp(-y^+/A^+) \right] y u_f$$

A^+ étant une constante,

on a alors :

$$\tau(y) = \tau_p (1 - y^+/D^+) = (v + v_t) \frac{du}{dy}$$

soit :

$$U^+ = \int_0^{y^+} \frac{1 - y^+/D^+}{1 - \chi y^+ [1 - \exp(-y^+/A^+)]} dy^+ \quad 15$$

avec $\chi = 0,36$ et $A^+ = 29$

que l'on a comparé à la loi où $\tau(y)$ est constant ($Re \rightarrow \infty$).

Les résultats présentés sur la figure (20) montrent un très bon accord avec les résultats expérimentaux pour $y^+ > 50$. En dessous les écarts calculés entre les lois (15) sont de même sens mais plus **faibles** que ceux mesurés, ce qui peut s'expliquer par une incertitude de 0,01 mm sur le positionnement de la sonde de mesure. Alors la seule hypothèse sur une variation de $\tau(y)$ due à l'action des forces de pression permet de trouver une évolution de la loi de paroi compatible avec l'expérience et qui conserve son caractère reconnu d'indépendance vis à vis du champ extérieur de vitesse.

C - Fluctuations longitudinales de vitesse près de la paroi

Les intensités de turbulence sont représentées sur la figure (21) en couche limite et régime établi pour différentes valeurs

de Re , les mêmes unités que précédemment (vitesse u_f et longueur v/u_f) permettent un bon regroupement des résultats le long du canal près de la paroi, et l'intensité de turbulence pour $y^+ > 30$ semble décroître quand Re croît /33/, /3/.

Les coefficients de dissymétrie (figure 22) déterminés numériquement /10/ montrent aussi une influence de Re alors que les coefficients d'aplatissement ne semblent pas y être sensibles pour $y^+ > 40$. En dessous de cette valeur les écarts deviennent plus importants, mais la sonde est alors très proche de la paroi du canal et on peut se demander si les écarts mesurés ne viennent pas d'une interaction parasite de la sonde avec cette paroi.

V - REPRESENTATIONS DEFICITAIRES DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

A - Régime établi

Les champs de vitesse obtenus pour différentes valeurs de Re en $x/D = 155$ sont présentés sur la figure (23) sous la forme :

$$U_m^+ - U^+(y) = f(y/D)$$

Les points expérimentaux se regroupent assez bien en une loi déficitaire de régime établi avec les approximations admises habituellement (Hinze /34/, Comte-Bellot /3/).

On retrouve dans la zone logarithmique les variations de pente déjà étudiées pour la loi pariétale. Toutefois les positions respectives des courbes, ainsi que les résultats présentés précédemment sur les figures (12 à 15) suggèrent que l'on n'a pas encore obtenu un régime parfaitement établi, ce qui ne permet pas d'extraire d'autre information de cette loi déficitaire.

B - Couche limite

Dans la zone de couche limite en canal la représentation

déficitaire doit dépendre de trois paramètres

$$\frac{U_m - U}{u_f} = g \left[\frac{y}{\delta}, \frac{y u_f}{\nu}, \frac{y}{D} \right] \quad 16$$

L'influence de la hauteur du canal D se traduit par un gradient de pression longitudinal faible, et à peu près constant le long du canal. Suivant Clauser /26/ nous pouvons caractériser cette influence sur la loi déficitaire par un nouveau paramètre

$$\beta = \frac{\delta_1}{\tau_p} \frac{dP}{dx}$$

δ_1 étant l'épaisseur de déplacement.

Dans notre montage on peut considérer que

$$D \frac{dP}{dx} \approx - \tau_p \quad \text{soit} \quad \beta \approx - \frac{\delta_1}{D}$$

L'expérience montre alors que $\beta \approx - 0,1$ et la comparaison de nos résultats avec ceux de Wieghard /35/ et de Schubauer-Klébannof /36/ montre que l'action de β donc du paramètre en y/D est très faible.

Le champ des vitesses obtenu pour différents Re_D , mais pour des valeurs peu différentes de $\beta = 0,1$ est présenté sous forme déficitaire sur la figure (24). Une échelle linéaire a été préférée à l'échelle logarithmique classique car elle permet de mieux présenter les différences existant au-delà de $y/\delta > 0,2$.

On constate que la loi déficitaire n'est qu'une représentation approchée du champ des vitesses dans la gamme de Re explorée.

Cette constatation peut également être déduite indirectement en étudiant le comportement de "la loi de sillage" obtenue par différents expérimentateurs et définie de la manière suivante : Coles /37/ qui admet l'existence des lois de paroi et déficitaire, remarque l'analogie entre l'écoulement extérieur de couche limite et le sillage et propose la

représentation générale du champ des vitesses au dessus de la sous couche visqueuse par une fonction

$$\frac{U}{u_f} = A \log \frac{y u_f}{\nu} + B + \pi \omega(y/\delta) \quad 17$$

ω étant la loi universelle de sillage définie expérimentalement.

A la frontière de la couche limite ($y = \delta$) on aura :

$$\frac{U_m}{u_f} = A \log \frac{\delta u_f}{\nu} + B + \pi \omega(1)$$

et d'après la loi de frottement (11) :

$$\pi = \left[\frac{U_m}{u_f} - A \log Re^+ - B \right] \frac{1}{\omega(1)} = Cte \quad 18$$

la loi déficitaire prend alors la forme

$$\frac{U_m - U}{u_f} = - A \log y/\delta - \pi \Omega(y/\delta) \quad 19$$

Les résultats expérimentaux obtenus par Wieghard /35/ , Bell /38/, Klébannof-Diehl /21/ dans le cas d'une couche limite sans gradient de pression permettant d'éliminer une influence possible de β ($\beta = 0$) montrent également que cette loi est une représentation imparfaite du champ extérieur des vitesses aux valeurs modérées de Re . En effet ayant admis l'invariance de A et de $\Omega(y/\delta)$ on doit admettre une variation de π avec Re , représentée sur la figure (25), qui est rapide pour $Re < 2.10^{-4}$ et qui tend à diminuer ensuite comme on pouvait le prévoir. On remarque de plus une grande dispersion des points obtenus selon les montages cités et ceci bien que les conditions expérimentales soient très semblables (pas ou peu de perturbations pour amorcer la turbulence).

Si l'influence du nombre de Reynolds sur la représentation déficitaire existe, elle apparaît difficile à prévoir et le raisonnement faisant apparaître la forme logarithmique comme conséquence d'une zone de superposition d'une loi pariétale et déficitaire devient approximatif alors qu'on explique les écarts constatés en paroi sans faire intervenir la loi extérieure. Rotta /39/ remarque en particulier qu'aux basses valeurs de Re l'épaisseur de la sous-couche, à laquelle la forme déficitaire ne s'applique pas, cesse d'être négligeable, ce dont on ne tient pas compte en utilisant la seule variable en y/δ . Cette frontière correspond quand Re est grand à une valeur constante $y_1^+ \approx 30$ mais la correction simple de la forme

$$\frac{U_m - U}{u_f} = f \left[\frac{y - y_1}{\delta - y_1} \right] \quad 20$$

où y_1/δ décroît quand Re augmente, va en sens inverse de celle souhaitée (figure 24).

VI - CONCLUSIONS CONCERNANT LES LOIS CLASSIQUES

Les représentations adimensionnelles utilisées pour décrire les écoulements turbulents sont des formes asymptotiques et dans les zones turbulentes extérieures les lois déficitaires et puissance sont équivalentes quand $Re \rightarrow \infty$.

Par contre pour des valeurs finies de Re on doit considérer qu'elles ne sont que des lois approchées, les paramètres de similitude en (3) intervenant tous.

L'expérience confirme et précise ces résultats : le champ pariétal des vitesses le long du canal peut être représenté par une loi $U^+ = f(y^+)$ dont le domaine transversal de validité est plus faible en couche limite qu'en régime établi (figure 19).

L'influence du nombre de Reynolds Re_D sur cette loi est faible : $\Delta U^+/U^+ < 3\%$ pour $y^+ \approx 40$, et peut être négligée ; elle semble

causée au moins par l'influence du gradient de pression statique lorsque l'épaisseur de cette zone pariétale cesse d'être négligeable.

Dans les zones extérieures la représentation déficitaire qui inclut l'influence de la paroi par l'intermédiaire de la vitesse de frottement u_f permet un meilleur regroupement des résultats expérimentaux que la loi puissance, surtout en régime établi /40/ bien qu'elle soit également fonction de Re .

En couche limite la représentation déficitaire est différente de celle de régime établi, la zone logarithmique y est relativement plus réduite. L'influence du nombre de Reynolds aux basses valeurs de ce paramètre apparaît assez importante (pour $y/\delta = 0,25$ par exemple $\Delta(U_m - U)/(U_m - U) \approx 15 \%$) et ne peut plus être négligée.)

Dans les deux cas, il apparaît difficile d'en prévoir l'évolution aux valeurs modérées de Re par des seules considérations dimensionnelles. Enfin les hypothèses faites ne permettent pas de préciser le passage de la zone de couche limite au régime établi.

VII - AUTRE PROPRIETE DES LOIS EXTERIEURES : INTERMITTENCE

L'existence du phénomène d'intermittence en couche limite peut être utilisée pour expliquer les écarts mesurés entre zones de sillage de couche limite et de régime établi (Hinze /4/) : les intensités de turbulence et les corrélations de couche limite divisées par la valeur du coefficient d'intermittence γ apparaît comme peu différente de celles mesurées en régime établi, (Schubauer /41/).

La détermination de γ est toutefois très délicate ; la confrontation des résultats très connus de Klébannof /42/ et Corrsin /43/ (pour une couche limite turbulente) montre des divergences considérables.

Nous avons alors tenté d'adapter une méthode mise au point par Sunyach /44/ pour étudier des jets, à l'aide de l'analyseur d'amplitude en temps réel déjà employé pour mesurer les différents moments du signal turbulent. Nous avons dû constater qu'au niveau de la jonction des couches limites ($x/D > 60$) il devenait impossible de déterminer un

niveau d'amplitude du signal (ou de sa dérivée) caractérisant un état non turbulent, donc de déterminer une évolution longitudinale de γ dans la zone de mélange.

VIII - SUR UNE NOUVELLE REPRESENTATION DU CHAMP EXTERIEUR DE VITESSE EN COUCHE LIMITE

Comme il existe toujours un domaine proche de la paroi où la loi $U^+ = f(y^+)$ peut s'appliquer et qu'une correction simple semble permettre d'en prévoir le comportement assez loin au-delà dans une zone à caractère logarithmique, nous prendrons ces faits comme hypothèses et ne considérerons plus l'analyse de Millikan comme une condition unique pour expliquer ces propriétés. On peut d'ailleurs remarquer que si les lois déficitaire et puissance sont équivalentes quand $Re \rightarrow \infty$ on peut représenter un même champ expérimental pariétal de vitesse indistinctement par une loi puissance ou logarithmique.

Les incertitudes sur la détermination de u_f ne permettent pas de pousser plus loin l'étude des écarts mesurés en couche limite sur la loi déficitaire. Cependant, écrivant cette loi sous la forme

$$\frac{U}{U_m} = 1 - \sqrt{\frac{C_{f_m}}{2}} f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \left(C_{f_m} = \tau_p / \rho \frac{U_m^2}{2} \right)$$

C'est à partir de cette expression que nous avons essayé de tirer des informations supplémentaires sur la loi extérieure.

Sur les figures (12 à 15) représentant les isovitesses réduites $U/U_m = Cte$ le long du plan (x,y) pour les différentes valeurs de $Re = 86\ 000, 39\ 000, 22\ 000, 11\ 000$, nous avons cherché à représenter une partie du champ des vitesses en couche limite par un faisceau de droites. Pour les deux valeurs les plus fortes de Re , on trouve bien qu'un tel faisceau peut représenter au plus les deux tiers de la longueur de la couche limite, mais ce domaine de validité diminue très vite quand Re diminue.

Toutefois ces mesures nous ont conduits aux résultats suivants :

- A) Ce faisceau n'a pas son origine à la paroi mais à une distance y'_0 de celle-ci.
- B) Cette distance est fonction de la vitesse d'entrée : elle diminue quand Re croît et nous pouvons la définir dans une première et grossière approximation par

$$y'_0 u_f / \nu \approx 50$$

soit $0,02 < y'_0 / \delta < 0,1$

On peut également préciser que cette représentation en faisceau de droite ne regroupe correctement les points expérimentaux qu'au-delà d'une isovitesse réduite

$$U/U_m \approx 0,7$$

le faisceau paraissant alors comme posé sur une région pariétale avec des conditions de raccordement à préciser.

On peut alors modifier la loi précédente en :

$$\frac{U}{U_m} = 1 - \sqrt{\frac{C_{f_m}}{2}} f \left[\frac{y - y'_0}{X(Re)} \right]$$

- C) Le domaine de validité de chaque faisceau de droite semble s'étendre dans une zone où C_{f_m} peut varier de 15 % environ ; on est amené à penser que ce paramètre n'a plus une grande importance que l'on exprimera en cherchant une loi de la forme :

$$\frac{U}{U_m} = g \left[\frac{y - y'_0}{X(Re)} \right]$$

Enfin si l'on définit y_0 comme coordonnée d'une isovitesse réduite $U/U_m = \text{Cte} > 0,7$

la loi
$$\frac{U}{U_m} = g \left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0} \right] \quad 21$$

s'applique à l'ensemble de nos résultats.

D) Nous avons alors recherché si la même loi pouvait s'appliquer aux valeurs obtenues par d'autres auteurs pour une plaque plane sans gradient longitudinal de pression.

Nous avons retrouvé sur les résultats de Wieghard /35/ une loi extérieure identique à celle que nous avons obtenue. Il semble toutefois que la valeur de y_0 correspondant à $U^* = 0,7$ soit relativement plus faible, ce qui peut être causé par l'influence du gradient de pression sur notre montage.

La loi en U^* tirée des résultats de Klébannof /21/ est identique aux nôtres dans le cas où les perturbations qui déclenchent la turbulence sont de petite hauteur, y_0 étant également relativement plus faible (figure 27).

CHAPITRE V

INTERPRETATION DES RESULTATS MIS EN EVIDENCE
EN COUCHE LIMITE.

ETUDE CRITIQUE DU MODELE DE HIRSCH.

I - GENERALITES

Les propriétés mises en évidence précédemment présentant des similitudes avec des résultats tirés du modèle de couche limite turbulente proposé par Hirsch /45/ /46/ /47/, nous avons été conduits à étudier ce travail.

Nous avons alors constaté en confrontant cette théorie à nos résultats expérimentaux qu'il était indispensable d'abandonner, de modifier ou de compléter certaines hypothèses importantes (sous-couche, conditions de raccordement avec l'extérieur, ordres de grandeur de certains termes).

Ceci nous a conduits à reprendre une étude critique de la théorie, dans laquelle nous montrerons que les hypothèses proposées ne

changent pas le résultat fondamental sur l'expression d'une loi unique représentant le champ extérieur des vitesses d'une couche limite en fonction de paramètres réduits.

Ces hypothèses nous permettront d'étendre l'étude au cas d'une couche limite avec léger gradient longitudinal de pression, puis à la zone de mélange. Les résultats seront en très bon accord avec l'expérience.

II - EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN ECOULEMENT TURBULENT BIDIMENSIONNEL EN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

On sait qu'un écoulement turbulent bidimensionnel incompressible est décrit par les équations de Navier Stokes et de continuité. Si nous séparons dès maintenant les valeurs moyennes des fluctuations de vitesses, celles-ci s'écriront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + uu'_x + vv'_y = \nu (u''_{x^2} + u''_{y^2}) - [(\overline{u^2})'_x + (\overline{uv})'_y + (\overline{uw})'_z] \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + uv'_x + vv'_y = \nu (v''_{x^2} + v''_{y^2}) - [(\overline{uv})'_x + (\overline{v^2})'_y + (\overline{vw})'_z] \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + (\overline{uw})'_x + (\overline{vw})'_y + (\overline{w^2})'_z = 0 \end{array} \right. \quad 22$$

$$u'_x + v'_y = 0$$

23

Cet ensemble d'équations est très difficile à manipuler. Dans l'espoir de pouvoir déterminer une solution approchée, on cherche alors en s'appuyant sur l'expérience s'il est possible de négliger certains termes. On doit enfin s'assurer que cette solution réintroduite dans l'équation de départ, vérifie effectivement les approximations faites, et enfin qu'elle correspond au phénomène expérimental.

L'approximation utilisée d'une façon générale est celle de Prandtl, qui pour un écoulement laminaire conduit à la solution considérée comme "classique" de Blasius. Cette approximation est également la plus utilisée pour décrire un écoulement turbulent.

La justification de ces approximations donne lieu à des démonstrations très différentes selon les auteurs : celle tirée de Schlichting /40/ semble à première vue plus élégante, mais celle présentée par Douchez /48/ qui apparaît plus longue, présente l'ensemble des hypothèses faites, et qui sont souvent sous-entendues dans la première. L'étude faite par Lazareff /49/ pour étayer le bien fondé des simplifications de Hirsch analyse les hypothèses implicites des démonstrations du type Schlichting et met en évidence le fait que la connaissance de l'ordre de grandeur d'une variable ne permet pas d'en tirer des conséquences sur l'ordre de grandeur de ses dérivées sans faire des hypothèses supplémentaires, ce qui le rapproche de l'attitude prise par Douchez. Les hypothèses de Prandtl consistent alors à supposer :

- 1) que les composantes transversales de vitesse V et leurs dérivées sont très petites devant les composantes longitudinales U et les dérivées correspondantes

$$\frac{V^{(n)}}{y^n} \ll \frac{U^{(n)}}{y^n} \qquad \frac{V^{(n)}}{x^n} \ll \frac{U^{(n)}}{x^n}$$

- 2) que les dérivées en x d'une fonction sont très petites devant les dérivées correspondantes en y , qui ont même ordre de grandeur que la fonction primitive.

Les équations de Navier se simplifient alors le long d'une plaque plane sans gradient longitudinal de pression en écoulement laminaire à

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \approx \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

24

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Une solution de ces équations a été proposée par Blasius, et on calcule que les termes de la deuxième équation négligée sont alors au plus de l'ordre du millième du plus petit terme de la lère équation de Navier /49/

La remarque fondamentale de Hirsch est la constatation que dans une large zone extérieure d'une couche limite turbulente, les gradients transversaux sont beaucoup plus faibles que dans une couche limite laminaire /45/ /46/ /47/. On ne peut donc plus utiliser les hypothèses de Prandtl pourtant très souvent appliquées aux écoulements turbulents, en particulier l'hypothèse (2).

Hirsch propose alors de simplifier les équations de Navier en choisissant pour les différents termes une nouvelle hiérarchie des ordres de grandeurs capable d'exprimer que les dérivées en y qui restent grandes devant celles en x , sont devenues petites devant des termes considérés comme principaux (vitesses longitudinales, épaisseur de couche limite ..., alors que dans l'approximation de Prandtl, ces dérivées en y étaient considérées comme d'ordre principal).

On peut remarquer qu'à l'extérieur d'une couche limite laminaire on peut rencontrer également une telle situation et la comparaison des résultats expérimentaux de Nikuradse /50/ (voir Schlichting /40/) et de la solution numérique de Blasius montre qu'on a un écart léger mais systématique entre la solution théorique et l'expérience au-delà de $U/U_g = 0,95$.

La conséquence de cette nouvelle formulation est que la seconde équation de Navier ne peut plus être considérée comme toujours vérifiée donc oubliée /46/.

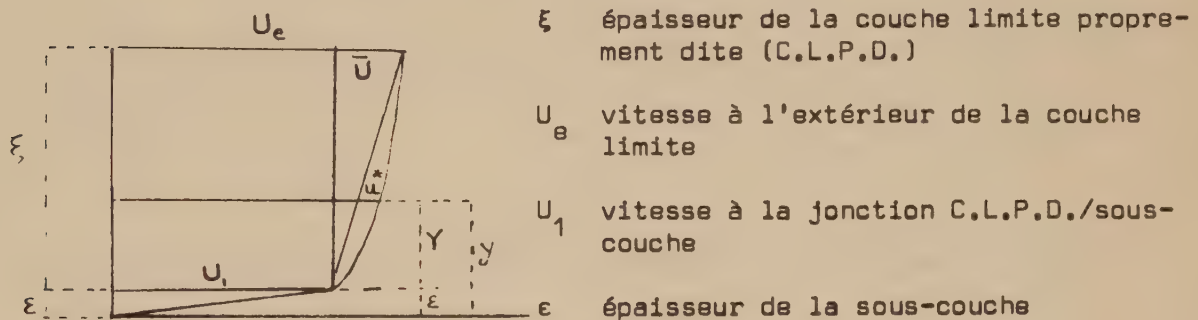
Afin de tenir compte de cette deuxième équation on l'introduira dans l'analyse en étudiant l'évolution de l'équation aux rotations, obtenue de manière classique après élimination des pressions entre les deux équations de Navier que nous étudierons maintenant.

III - DESCRIPTION DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE ET DES HYPOTHESES DE CALCUL

Afin de développer les conséquences des remarques précédentes, l'écoulement d'une couche limite turbulente sera décrit de la manière suivante :

Au voisinage immédiat de la paroi se trouve une mince zone d'épaisseur ϵ , dans laquelle les gradients de vitesse sont forts, et que nous appellerons sous-couche.

Au-delà de cette frontière d'ordonnée ϵ , où la vitesse est U_1 , les gradients deviennent faibles. Cette zone d'épaisseur ξ sera appelée couche limite proprement dite (C.L.P.D.) et la vitesse y sera comprise entre U_1 et U_e . On aura alors une description résumée par le schéma ci-dessous avec les définitions suivantes :



$$Y = y - \epsilon$$

$$\bar{U} = U_e - U_1$$

D'après ces définitions

$$U(y) = U_1 + \bar{U} \frac{Y}{\xi} + u^*(Y) = U^*(Y) + u^*(Y)$$

avec

$$u^*(0) = 0 = u^*(\xi) = 0$$

A l'extérieur de la couche limite

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{Y=\xi} = 0 \quad \frac{\overline{U}}{\xi} + u_y^{*'} = 0$$

On posera

$$V = V^* + v^*$$

tel que

$$u_x^{*'} + v_y^{*'} = 0$$

et

$$u_x^{*'} + v_y^{*'} = 0$$

On a alors

$$v^* = - \left[\left(\frac{\overline{U}}{\xi} \right)'_x \frac{Y^2}{2} + (u_1)'_x \right] + v_{(Y=0)}^*$$

et l'on peut définir une fonction de courant complémentaire $\psi(x,y)$ telle que

$$u^* = \psi_y' \quad v^* = - \psi_x'$$

La connaissance des écoulements turbulents ne permet pas de lier de façon théorique les fluctuations des vitesses aux vitesses moyennes.

L'expérience montre cependant que dans la C.L.P.D. définie par Hirsch le groupement $(uu_x' + vu_y')$ est approximativement équilibré par $(\overline{uv})_y'$. On posera donc, pour relations de fermeture en se basant sur ces considérations expérimentales que :

$$(\overline{uv})_y' = \chi_1 (uu_x' + vu_y') + \chi_2$$

χ_1 et χ_2 pouvant être des fonctions lentement variables de x seul ou des constantes.

Nous discuterons cette hypothèse, plus en détail ultérieurement après avoir montré que le champ de vitesses pouvait être considéré comme indépendant de la corrélation $(\overline{uv})$ dans le cadre des approximations faites.

De même on posera :

$$(\overline{v^2})'_y = -\chi_3 (UV'_x + vv'_y)'_x$$

les autres termes des corrélations seront supposés négligeables.

Afin de pouvoir simplifier l'équation aux rotations conformément à ce que nous avons indiqué précédemment, on fera les hypothèses sur les ordres de grandeurs des différents termes :

a) U_1, U_e, U , seront considérés d'ordre principal $[0]$

(les règles de calculs sur les ordres de grandeurs seront les mêmes que celles des exposants des fonctions puissance d'une même variable).

b) Les dérivées en y des vitesses seront au moins du premier ordre de petitesse $[-1]$

On peut remarquer que cette condition impose seulement aux termes principaux d'avoir des dérivées en y d'ordre inférieur, les dérivées en y d'une grandeur déjà petite pouvant rester du même ordre que cette grandeur.

c) Les dérivées en x correspondantes seront au moins du second ordre de petitesse $[-2]$ ainsi que $\left[\frac{1}{Re}\right] = [-2]$

$$d) \left[\left(\begin{matrix} \\ y^n x^m \end{matrix} \right)^{(n+m)} \right] = \left[\left(\begin{matrix} \\ x \end{matrix} \right)' \right] = [-2]$$

e) Enfin à l'embase de la C.L.P.D. on supposera $V_{(0)x2}^{*''}$ négligeable devant $(U/\xi)'_x$

Nous y ajouterons que $V_{(0)}^{*}$ est négligeable, ce que nous justifierons ultérieurement.

Nous poserons alors

$$\left[V^{*(0)} \right] = \left[-2 \right] \quad (\text{alors } \left[V \right] = \left[-2 \right])$$

d'après l'équation de continuité).

Dérivant la première équation de Navier par y, et la
seconde par x (*)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1 + \chi_1) \left[U'_y U'_x + UU''_{xy} + V'_y U'_y + VU''_{y2} \right] = \nu U''_{y3}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1 + \chi_3) \left[U'_x V'_x + UV''_{x2} + VV''_{yx} + V'_x V'_y \right] = \nu V''_{xy2}$$

$$U'_x + V'_y = 0$$

On obtient par soustraction

$$U \left[(1 + \chi_1) U''_{yx} - V''_{x2} (1 + \chi_3) \right] + V (1 + \chi_1) U''_{y2} = \nu (U''_{y3} + V''_{xy2}) + V (1 + \chi_3) V''_{yx} \quad 25$$

(*) Les termes en $\chi'_{3x} (UV'_x + VV'_y)$ non notés sont au moins [-3] donc également négligeables,

et en remplaçant U, V par leurs expressions :

$$\begin{aligned} & \left[\underbrace{U_1 + \frac{\bar{U}}{\xi} \gamma + \psi'_y}_{[0]} \right] \left[\underbrace{(1 + \chi_1) \left\{ \left(\frac{\bar{U}}{\xi} \right)'_x + \psi''_{y2x} \right\} + (1 + \chi_3) \left\{ \left(\frac{\bar{U}}{\xi} \right)''_{x3} \frac{\gamma^2}{2} + U''_{1x3} \gamma + \psi''_{x3} - V''_{x2} (0) \right\}}_{[-2]} \right] \\ & - \left[\underbrace{\left(\frac{\bar{U}}{\xi} \right)'_x \frac{\gamma^2}{2} + U''_{1x} \gamma + \psi'_x - V^*(0)}_{-2} \right] \left[\underbrace{1 + \chi_1}_{-1} \underbrace{\psi''_{y3}}_{-3} \approx \underbrace{\nu \psi''_{y4}}_{-3} + \underbrace{\nu V''_{xy2}}_{-4} + \underbrace{V (1 + \chi_3) V''_{yx}}_{-4} \right] \end{aligned}$$

hyp. e

Négligeant les termes d'ordre plus petit que $[-2]$, il reste :

$$\frac{1 + \chi_1}{1 + \chi_3} \left(\frac{\overline{U}}{\xi} \right)'_x + \left(\frac{\overline{U}}{\xi} \right)''_{x^3} \frac{Y^2}{2} + (U_1)'_{x^3} Y + \frac{1 + \chi_1}{1 + \chi_3} \psi''_{y^2 x} + \psi'''_{x^3} = 0 + 0[3] \quad 26$$

On appellera solution du problème une fonction $\psi(x,y)$ vérifiant l'équation (26) linéaire en ψ à un infiniment petit du 3° ordre près.

IV - RECHERCHE D'UNE SOLUTION AU PROBLEME EN Y DANS LA C.L.P.D.

On cherchera d'abord une solution ψ à variable séparée de l'équation sans second membre

$$\frac{1 + \chi_1}{1 + \chi_3} \psi''_{y^2 x} + \psi'''_{x^3} = 0 \quad 27$$

en posant

$$\psi(x,y) = \phi(y) \cdot f(x)$$

et le modèle conduit à faire une hypothèse complémentaire sur l'ordre de grandeur de ϕ et f dont il apparaît possible de s'affranchir, en effet :

$$-v^* = \psi'_x = \phi \cdot f'_x$$

aux ordres de grandeurs :

$$\left[\psi'_x \right] = \left[\phi \right] \left[f'_x \right] = \left[\phi \right] \left[-2 \right] = \left[-2 \right]$$

soit

$$\left[\phi \right] = \left[0 \right] \quad \text{ordre principal}$$

d'autre part

$$u^*(y) = \psi_y'(y)$$

$$\psi = \int_0^Y u^* dy = u^*(Y_1) Y_1 \quad \text{avec } 0 \leq Y_1 < Y \leq \xi$$

soit
$$[\psi] = [u^*] [\xi] = [-1] = [\phi] [f]$$

alors
$$[f] = [-1] \quad \text{du premier ordre de petitesse.}$$

Remplaçant ψ par son expression dans l'équation sans second membre on obtient :

$$\frac{\phi''_{y^2}}{\phi} = \frac{f''_x}{f'_x} \frac{1 + \chi_3}{1 + \chi_1} = -c^2$$

dont les solutions sont :

$$\phi = \phi_1 e^{icy} + \phi_2 e^{-icy}$$

$$f = f_1 e^{c'x} + f_2 e^{-c'x} + f_3$$

En posant

$$c' = c \sqrt{\frac{1 + \chi_1}{1 + \chi_3}} \quad (c \text{ et } c' > 0)$$

que nous avons supposé constant dans un domaine où χ_1 et χ_2 évoluent très peu.

Ayant montré que f était du 1° ordre de petitesse, quand x croît on doit avoir $f_1 \approx 0$, qui ne s'introduit plus comme hypothèse complémentaire.

Les conditions aux limites pour ϕ sont telles que

$$u^* = \phi'_y \cdot f = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = \xi \quad \forall x$$

$$\phi'_y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y = \xi \end{array} \right.$$

soit

$$\phi_{1n} = \phi_{2n} = \phi_n \quad \text{et} \quad c_n \xi = n\pi$$

ϕ n'est donc pas fonction de y seul mais aussi de x par ξ .

L'introduction de la fonction $\phi.f$ dans l'équation sans second membre montre que les dérivées en x de ϕ s'introduisent dans des termes en $\phi''_{x^2} f'_x$, $\phi'_x f''_{x^2}$, du quatrième ordre et $\phi'_x.f$ du troisième ordre, $[f]$ étant $[-1]$ donc tous négligeables et $\psi.f$ est solution de l'équation (27) avec les conventions posées.

$$\text{Donc} \quad u^*(Y) = \sum_n \phi_n f_n \sin \frac{n\pi}{\xi} Y$$

$$\text{En} \quad Y = \xi \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{Soit} \quad u^{*'}_y(\xi) + u^{*'}_y(\xi) = 0$$

$$\text{ou} \quad u^{*'}_y(\xi) = -u^{*'}_y(\xi) = -\frac{\bar{u}}{\xi} = \sum_n \phi_n f_n (-1)^n n \frac{\pi}{\xi}$$

on pose

$$\phi_n f_n = \phi_1 K_n$$

$$\phi_1 = \frac{-\bar{u}}{\pi \sum (-1)^n n K_n}$$

et

$$u^*(Y) = - \frac{\bar{U}}{\pi \sum_n (-1)^n n K_n} \sum_n K_n \sin n \frac{\pi}{\xi} Y \quad 28$$

et Hirsch montre par ailleurs qu'une solution particulière de l'équation (26) correspond à une contribution du second ordre, donc négligeable devant la solution précédente (d'ordre -1) (Annexe 1 /47/).

Les K_n étant fonction de x par des termes en $e^{-c'x}$, quand x est assez grand ils tendent vers une valeur constante que nous supposerons désormais atteinte. Enfin cette solution est indépendante des x_1, x_2, x_3 dans le cadre des hypothèses faites.

Le champ des vitesses dans la zone extérieure d'une couche limite turbulente peut alors s'écrire sous la forme :

$$U(y) = U_1 + \frac{\bar{U}}{\xi} Y + u^*\left(\frac{Y}{\xi}\right)$$

soit

$$\frac{U(Y) - U_1}{U_m - U_1} = g\left(\frac{Y}{\xi}\right) \quad 29$$

Cette loi g a été obtenue sans faire d'hypothèse sur U_1 . Un changement de la valeur de U_1 (lié à une variation correspondante de y_0) ne doit donc pas modifier la forme de la loi g et l'on peut remarquer qu'une loi puissance $g = (Y/\xi)^n$ présente cette propriété.

Choisissons alors $U_1/U_m = \text{Cte}$

On a :

$$\bar{U} = U_m - U_1 = K U_m$$

et

$$\frac{U}{U_m} = G\left(\frac{Y}{\xi}\right) = G\left(\frac{Y - e}{\delta - \xi}\right) \quad 30$$

qui est bien de la forme (21) qui nous a permis de regrouper nos résultats /55/ expérimentaux avec $U_1 = 0,7 U_m$ en couche limite.

Nous avons vérifié par ailleurs que la loi $G(Y/\xi)$ était bien indépendante de la valeur de U_1 si $U_1 > 0,7 U_m$ c'est-à-dire dans le domaine où s'appliquent les hypothèses faites pour la résolution.

Hirsch a montré par ailleurs /46/ que la solution proposée était compatible (consistante) avec les hypothèses sur les ordres de grandeur. Les modifications au modèle que nous avons proposées ne changent pas cette conclusion : la loi de frottement théorique est en effet proche de la loi expérimentale et l'ordre de grandeur des échanges de quantité de mouvement dans la C.L.P.D. n'est pas modifié.

V - INTERPRETATION CRITIQUE DES RESULTATS TIRES DU MODELE DE HIRSCH

A - Critique de la solution de Hirsch

La confrontation avec l'expérience de la loi de vitesse tirée du modèle de Hirsch est très favorable. Toutefois le rôle de la contrainte turbulente $-\rho(\overline{uv})$ dans la première équation de Navier apparaît insuffisamment précisé. Cette contrainte est posée telle que :

$$(\overline{uv})'_y = x_1(UU'_x + VU'_y) + x_2 \quad 31$$

et la première équation de Navier devient le long d'une plaque plane :

$$(1 + x_1)(UU'_x + VU'_y) + x_2 = 0 \quad 32$$

On lui trouve alors une solution approchée indépendante de x_1 et x_2 au 3^e ordre de petitesse près, de la forme :

$$\frac{U - U_1}{U_m - U_1} = f\left(\frac{y - y_0}{\delta - y_0}\right) \quad 33$$

avec $U(y_0) = U_1 = \text{Cte}$, que l'expérience vérifie très bien.

A partir de cette loi de vitesse et de la loi de frottement, on en déduit la fonction τ_y' qui conduit à choisir des valeurs de $x_1 \approx -0,95$ et $x_2 \approx 0,05$ /46/.

Cette détermination ayant nécessairement une certaine imprécision, on peut se demander alors si f est solution approchée d'une équation d'Euler, ou si elle correspond au cas trivial $x_1 = -1$ $x_2 = 0$.

Dans ce dernier cas en effet l'équation (32) serait automatiquement satisfaite par n'importe quelle loi, alors que dans le cas d'une solution d'Euler le rôle de la contrainte turbulente semble disparaître, ce qu'il faut justifier.

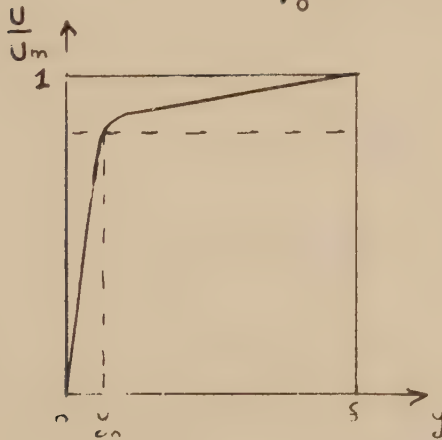
Nous nous proposons donc d'essayer de préciser le rôle de la contrainte turbulente ($\overline{uv}$) dans la première équation de Navier.

B - Vérification de la solution de Hirsch le long d'une plaque plane sans gradient de pression

La première équation de Navier peut se réduire à :

$$UU'_x + VU'_y \approx (\overline{uv})'_y \quad 34$$

avec
$$V = - \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy = \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_{y_1} y_1 \quad 0 < y_1 < y \quad 35$$



Reprenons l'étude aux ordres de grandeur dans la zone extérieure de la couche limite où les gradients transversaux sont faibles, liés à une zone de paroi très mince à gradients transversaux fort (y_0 très petit).

Si on est assez éloigné de la paroi $[y] = [\delta] = [0]$ (ordre principal) et suivant les conventions faites $[V] = [-2]$

alors l'équation (34) devient aux dimensions

$$[-2] + [-2] [-1] \simeq [(\overline{uv})'_y] \quad 36$$

Nous devons alors chercher à préciser l'ordre de grandeur de $(\overline{uv})'_y$ que l'on sait par hypothèse d'ordre de petitesse au moins de $[-1]$. Dans la zone extérieure la solution de Hirsch avec $U_1 = \text{Cte}$, $U_m = \text{Cte}$ est telle que

$$\frac{U}{U_m} = g\left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0}\right] \simeq h\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{car } y_0 \ll \delta \quad 37$$

On sait qu'alors

$$\frac{(\overline{uv})_{y_0}}{U_m^2} \simeq \frac{d\delta_2}{dx} = a \frac{d\delta}{dx} \quad 38$$

$$\text{car} \quad \delta_2 = a\delta \quad 39$$

La forme du champ de vitesse d'un écoulement turbulent est telle qu'on pourra poser : $[a] = [-1]$ ($\delta_2 \ll \delta$) ($y_0 < y_1 < \delta$)

$$[\overline{uv}] = [-1] [-2] = [-3] = [(\overline{uv})'_{y_1}] [y_1 - \delta] = [(\overline{uv})'_y] [0] \quad 40$$

aux ordres de grandeur :

$$[(\overline{uv})'_y] = [-3] \quad 41$$

L'équation de Navier (34) se réduit donc bien en principal à

$$UU'_x \simeq 0 \quad 42$$

Vérifions alors si la solution approchée proposée vérifie bien cette équation : en posant $\eta = \frac{y}{\delta}$ ($h' = h'_\eta$)

$$\text{Soit} \quad U_m^2 \cdot h \cdot h' \cdot \eta \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \approx 0 \quad 43$$

Remarquons que

$$\left[\frac{1}{\delta} h' \right] = \left[h'_y \right] = [-1]$$

On a aux ordres de grandeur :

$$[0] [0] [-1] [0] [-2] = [-3] \quad 44$$

f vérifie bien l'équation (42) à un infiniment petit du 3^e ordre près et est solution approchée de cette équation selon les conventions faites.

C - Autre méthode d'obtention d'une solution de type Hirsch le long d'une plaque plane sans gradient de pression

1 - Utilisant la méthode d'étude proposée par Townsend pour les couches limites d'équilibre /62/ (The Structure of Turbulent Shear Flows, 1956, p. 229), cherchons s'il existe un domaine où les formes suivantes sont solutions approchées de l'équation (34) :

$$U = U_m + u_o f(y/\delta) \quad 45$$

$$\overline{uv} = u_o^2 g(y/\delta) \quad 46$$

U_m étant la vitesse dans l'écoulement

u_o et δ étant les vitesse et longueur de référence, fonction de x seul.

On posera $\eta = y/\delta$.

Reportant ces expressions dans l'équation (34) et tenant compte de (35)

$$U_m \left[\frac{du_o}{dx} f - \frac{u_o}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \eta f' \right] + u_o f^2 \frac{du_o}{dx} - \frac{u_o}{\delta} \frac{du_o \delta}{dx} f' \int_0^\eta f d\eta = \frac{u_o^2}{\delta} g' \quad 47$$

Townsend nous propose de chercher une solution approchée de cette équation dans le cas où u_0 est petit

soit $[u_0] = [-1]$

Affranchissons nous de l'hypothèse d'existence d'une zone de recouvrement avec une zone pariétale qui imposerait le choix $u_0 = u_f$.

On peut encore écrire (47) sous la forme :

$$\frac{du_0}{dx} [U_m + u_0 f] f - \frac{u_0}{\delta} f' \frac{d\delta}{dx} \int_0^\eta [U_m + u_0 f] d\eta + \frac{du_0}{dx} \int_0^\eta f d\eta \approx \frac{u_0^2}{\delta} g' \quad 48$$

Avec les conventions faites sur les ordres de grandeur :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right] = [-2], \quad \left[\frac{\partial}{\partial y} \right] = [-1] \quad \text{et remarquant que } \frac{1}{\delta} ()' = \frac{\partial}{\partial y}$$

l'équation (48) devient aux ordres de grandeur

$$[-2] - [-4] + [-2] \approx [-3]$$

L'équation (48) sera donc vérifiée par (45) au troisième ordre si l'on élimine les termes en $[-2]$ ce que l'on peut faire en choisissant $u_0 = \text{Cte}$ (u_0 donc proportionnel à $U_m = \text{Cte}$).

$$\text{Alors } \frac{du_0}{dx} \equiv 0 \quad (\text{et l'on a de plus } u_0 = \alpha U_m \text{ avec } [\alpha] = [-1])$$

$$\text{Posons } U_1 = U_m - u_0 = \text{Cte}$$

$$\text{Alors les fonctions } \frac{U - U_1}{U_m - U_1} = f_1\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad 49$$

$$\text{ou encore } \frac{U}{U_m} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad 50$$

sont solutions approchées (au 3° ordre) de l'équation (34).

2 - Les formes (45) donc les lois (49) et (50) supposent que l'origine de l'échelle des longueurs (paroi) doit être très proche de la frontière du domaine où les hypothèses faites (petitesse des gradients transversaux, u_0 faible) soient valables. Ce sera le cas des très grands nombres de Reynolds.

Dans le cas où cette approximation cesse d'être vraie (épaisseur non négligeable de la zone pariétale à forts gradients) on devra prendre une forme corrigée de (45) où les ordonnées et références de vitesses sont repérées par rapport à la frontière du domaine où les approximations commencent à être valables.

On cherche alors des solutions de la forme :

$$U = U_m + u_0 f\left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0}\right] \quad 51$$

$$\overline{uv} = u_0^2 g\left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0}\right] \quad 52$$

Reprenant la même procédure que précédemment, on montre que :

- 1) si u_0 est constant $\left(\frac{du_0}{dx} \equiv 0\right)$
- 2) si y_0 évolue moins vite que δ : $[y'_{0x}] = [-3]$ ou lui est proportionnel
- 3) si $V(y_0)$ est nul (ou négligeable) c'est-à-dire que l'isovitesse $U_1 = U(y_0)$ suit à peu près une ligne de courant, alors les termes en y_{0x} apparaissant dans l'expression

$$\left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0}\right]'_x = -\frac{y'_{0x}}{\delta - y_0} - \frac{y}{(\delta - y_0)^2} [\delta'_x - y'_{0x}] \quad 53$$

sont d'ordre $[-3]$, donc négligeables devant $[\delta'_x]$ et la forme (51) est solution approchée de l'équation (34). On retrouve les hypothèses introduites par Hirsch pour déterminer une solution approchée de l'équation aux rotations.

Cependant on ne peut faire apparaître l'action des gradients de pressions introduits par Hirsch et qui, bien qu'insuffisants pour équilibrer à eux seuls la lère équation de Navier (ce qui impose l'intervention d'une contrainte turbulente non nulle) peuvent avoir une grande influence sur le mécanisme des transferts.

D - Remarque sur la forme de la viscosité turbulente et sur la relation de fermeture proposée par Hirsch

Les résultats expérimentaux ne permettant pas de mettre en évidence des écarts entre les lois en $\left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0} \right]$ obtenues pouvant caractériser l'influence des termes d'ordre les plus faibles, on peut penser que l'approximation au 3^o ordre près est suffisante pour déterminer le champ moyen de vitesse avec une incertitude correspondant aux erreurs de mesure.

Dans ce cas toute relation de fermeture liant la corrélation à l'écoulement moyen ne doit pas modifier, aux erreurs de mesure près, le champ moyen de vitesse. De même on devrait pouvoir choisir une loi de viscosité turbulente v_t quelconque sans modifier sensiblement le champ moyen de vitesse obtenu par intégration.

On constate effectivement que des lois de vitesse en très bon accord avec l'expérience dans la zone des faibles gradients transversaux ont été obtenues par Mouton /31/ avec une fonction fortement croissante $v_t(y)$ par Clauser /26/ avec $v_t = \text{Cte}$, et par Michel et Al. /51/ avec une loi $v_t(y)$ décroissante jusqu'à 0.

On peut remarquer enfin que les trois auteurs cités précédemment (Mouton, Clauser, Michel) trouvent des distributions $\overline{uv}$ en accord avec l'expérience.

Dans le cas où les hypothèses sont exactes il ne reste plus qu'à utiliser au mieux la loi de vitesse (51). Ecrivant les conditions de raccordement avec la sous-couche en y_0 , on peut en déduire une loi de frottement. Celle-ci réintroduite dans l'équation (34) permet de calculer un terme complémentaire annulant effectivement cette équation,

que l'on assimilera au gradient de la contrainte turbulente $(\overline{uv})'_y$. Cette procédure est suivie par Townsend pour déterminer dans quelles conditions l'évolution de la contrainte turbulente est conforme à l'hypothèse d'équilibre. C'est également ce que fait Hirsch en posant plus brutalement sa relation (31) dès le début de son article :

$$(\overline{uv})'_y = \chi_1 (UU'_x + VU'_y) + \chi_2$$

Cette relation permet de retrouver une évolution $\overline{uv}(y)$ en très bon accord avec l'expérience. De plus réintroduite dès le départ on vérifie bien qu'elle ne modifie pas la forme de la solution mise en évidence.

VI - ETUDE DE LA SOUS-COUCHE

A - En dessous de la C.L.P.D. se trouve la sous-couche d'épaisseur ϵ où les gradients transversaux sont forts et pour laquelle nous supposons que s'applique la simplification de Prandtl. Les équations (22) se réduisent alors à

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + UU'_x + VU'_y + (\overline{uv})'_y \approx \nu U''_{y^2} & 54 \\ U'_x + V'_y = 0 & 55 \end{cases}$$

Hirsch se place dans le cas limite où $(\overline{uv})'_y$ est suffisamment faible pour être négligé et où l'influence de la viscosité est prépondérante ($\overline{uv} \approx 0$). Il étudie alors un problème laminaire, satisfaisant l'équation de Prandtl dans un domaine suffisamment mince pour que le champ des vitesses issu de la résolution de Blasius soit peu différent d'une fonction linéaire en y soit :

$$U(y) \approx \frac{U_1}{\epsilon} y$$

Cette façon d'aborder le problème présente l'avantage de ne faire appel à aucune hypothèse sur la turbulence. Comme les transferts de quantité de mouvement se font essentiellement dans la C.L.P.D., la loi de frottement sera proche de la loi expérimentale.

Cependant elle présente l'inconvénient de raccorder une sous-couche où $\overline{uv} = 0$ en y_0 à la C.L.P.D. où $\overline{uv}$ est maximum, c'est-à-dire à admettre une discontinuité de $\overline{uv}$ à la jonction sous-couche/C.L.P.D.

B - En réalité en dessous de la C.L.P.D. (limitée par U_1 encore défini expérimentalement) le champ des vitesses ne peut être représenté par une solution laminaire de Blasius sauf au voisinage immédiat de la paroi (où $\overline{uv} \approx 0$ pour $y^+ < 10$).

De plus les évolutions respectives de $\overline{uv}$ et de vU_y' , $(\overline{uv})_y'$ et vU_{y^2}'' se font sans discontinuité à la jonction sous-couche/C.L.P.D. Enfin les gradients de vitesses U_y' dans la sous-couche restent très grands et beaucoup plus importants que pour le champ laminaire obtenu pour des valeurs comparables de Re_x (Schubauer-Klebanoff /52/, Knudsen and Katz /53/). Afin de déduire les conséquences de ces remarques sur les équations de Prandtl supposons qu'au voisinage de la paroi x et U soient d'ordre de grandeur principal $[x] = [U] = [0]$, x apparaissant dans ce cas la longueur de référence la plus commode puisqu'on ne sait pas quelle relation lie ϵ à ξ .

Posons
$$[\epsilon] = [-2]$$

alors que les dérivées en y des vitesses seront très grandes.

A la paroi ($y = 0$, $U_x' = 0$) l'évolution des dérivées est monotone et les dérivées en x resteront très petites

soit
$$\left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)'_x = [-2] \quad \text{enfin posons} \quad [Re_x] = [+2] \quad \text{soit} \quad [v] = [-2]$$

On a alors $V(0) = 0 = U'_x(0) = V'_x(0)$

Comme $V = - \int_0^\epsilon U'_x dy = - U'_x(\epsilon_0) \epsilon_0$ $0 \leq \epsilon_0 \leq \epsilon$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

l'équation de Prandtl devient aux ordres de grandeurs

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + u u'_x + v u'_y + (\overline{uv})'_y \right] &= \left[v \left[u''_{x^2} + u''_{y^2} \right] \right] \\ \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\overline{uv})'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

Il reste en principal que :

$$v u''_{y^2} - (\overline{uv})'_y \approx 0 \quad 56$$

A la paroi les conditions aux limites imposent

$$\mu \frac{dU}{dy} = \tau_P \quad U = 0 \quad u = 0$$

conduisant à la solution linéaire définie précédemment

avec $(\overline{uv})'_y \approx v u''_{y^2} \approx 0$ pour $y^+ < 10$ correspondant à la sous-couche laminaire.

Au-delà de cette ordonnée ($y^+ > 10$) se trouve la zone de bouffées où $(\overline{uv})'_y$ et $v u''_{y^2}$ sont non nuls.

La méconnaissance de la fonction $(\overline{uv})'_y$ ne permet pas de déduire une loi de vitesse, et l'on sait seulement qu'on aura une loi unique de la forme

$$U^+ = f(y^+) \quad (y^+ < 40)$$

L'expérience montre qu'ensuite les gradients transversaux de vitesse U_y' chutent très brutalement /49/. On exprimera ce fait en modifiant leur ordre de grandeur, soit $[+1]$, les autres, en particulier celui de la sous-couche restant inchangés, soit :

$$\left[\varepsilon U_y' \right] = \left[-1 \right] \quad \left[V \right] = \left[-4 \right]$$

l'équation de Prandtl devient aux ordres de grandeur

$$\left[-2 \right] + \left[0 \right] \left[2 \right] + \left[-4 \right] \left[+1 \right] + \left[(\overline{uv})_y' \right] = \left[-2 \right] \left[\left[-2 \right] + \left[+1 \right] \right]$$

Le terme visqueux a diminué d'un ordre de grandeur et on peut le considérer comme nul soit $\nu U_y'' = 0$, et l'on aura également

$$(\overline{uv})_y' \simeq 0 \quad 57$$

Le champ des vitesses qui s'exprime dans cette zone pariétale par une loi unique $U^+ = f(y^+)$ prend alors une forme logarithmique que l'on peut déduire d'hypothèses empiriques liant $\overline{uv}$ à U_y' (théorie de la longueur de mélange) :

$$U^+ = A \log y^+ + B \quad 58$$

Par ailleurs on remarque que dans un domaine voisin du raccordement avec la C.L.P.D.

$$U U_x' \gg V U_y' \quad 59$$

VII - ETUDE CRITIQUE DE LA CONDITION DE RACCORDEMENT DE LA C.L.P.D. ET DE LA SOUS-COUCHE DANS LE MODELE DE HIRSCH

Cas d'une sous-couche uniquement visqueuse

Hirsch remarque que si l'on suppose $U_1/U_e = Cte$ le long d'une plaque plane sans gradient de pression, on peut trouver une

solution asymptotique approchée du problème en x de la C.L.P.D. en

$$\xi = \alpha x^{3/4} \quad 60$$

et que cette solution est alors compatible avec la loi de frottement en x déduite d'une solution de type Blasius lorsque l'épaisseur de la sous-couche est petite (les échanges de quantité de mouvement y étant alors négligeables)

$$C_f = C_{f_0} x^{-1/4} \quad 61$$

On retrouve la loi puissance de frottement utilisée classiquement.

- . Cependant l'expérience ne justifie pas l'hypothèse d'une sous-couche uniquement visqueuse, et on doit faire intervenir dans la plus grande partie de celle-ci la corrélation $(\overline{uv})$ pour représenter le champ de vitesse.
- . Cette hypothèse conduit également à l'existence d'une discontinuité du gradient de vitesse en ϵ /46/,

en effet, d'après le modèle de Hirsch

$$\epsilon = \epsilon_0 x^{1/4} \quad (\text{posons } \epsilon^- \approx \epsilon - \epsilon^2, \epsilon^+ \approx \epsilon + \epsilon^2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{\epsilon^-} = \frac{U_1}{\epsilon} = \frac{U_1}{\epsilon_0 x^{1/4}}$$

et

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{\epsilon^+} = \frac{Cte}{\xi} = Cte x^{-3/4}$$

Cette discontinuité est liée à une discontinuité de la corrélation $\overline{uv}$ nulle en ϵ^- maximum en ϵ^+ .

Remarquons enfin que bien que l'équation de continuité ne soit pas absolument satisfaite /46/ à un terme $1/4 \frac{U_1}{\varepsilon} \frac{y}{x}$ près, ce dernier doit être considéré comme négligeable dans le cadre des hypothèses faites. Cette démonstration a d'ailleurs été reprise par Hirsch /47/. Nous préférons toutefois considérer que $V(y_0)$ est négligeable dans la sous-couche (d'où l'hypothèse supplémentaire $V(y_0) = 0$). C'est d'ailleurs ce que l'on sous-entend habituellement lorsqu'on admet qu'il existe une loi universelle de paroi $U^+ = f(y^+)$ dans la sous-couche.

VIII - DETERMINATION DE L'EVOLUTION DE LA VITESSE AU RACCORDEMENT DE LA C.L.P.D. AVEC LA SOUS-COUCHE

Etudions alors le comportement de la relation de fermeture

$$(\overline{uv})'_y = x_1 (U U'_x + V U'_y) + x_2$$

où x_1 , x_2 sont des fonctions de x seul (ou des constantes).

La viscosité étant négligeable dans la C.L.P.D., la première équation de Navier s'écrit au voisinage de l'extérieur de la C.L.P.D. en $y = \delta$, où $U'_y = 0$ et $U = U_m(x)$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + (1 + x_1) U_m U'_{mx} + x_2 = 0 \quad 62$$

alors que dans l'écoulement potentiel on aura

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + U_m U'_{mx} = 0 \quad 63$$

Supposons ces deux lois valables simultanément dans un domaine voisin de $y = \delta$, on peut alors lier x_1 et x_2 par

$$x_2 = \frac{x_1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad 64$$

si le gradient longitudinal extérieur de pression est nul, x_2 est nul.

La corrélation $(\overline{uv})$ nulle à la paroi et à l'extérieur de la C.L.P.D. doit passer par un maximum d'ordonnée $y_0 = \epsilon$ où la vitesse sera $U_1 = U_1(x)$ et l'expérience montre que ϵ est faible ($\epsilon \ll \delta$).

Dans la sous-couche ($y < \epsilon$) nous avons montré que UU'_x et VU'_y sont du même ordre de petitesse, par contre près de la jonction, U'_y décroît très rapidement, nous avons montré que dans ces conditions on avait $UU'_x \gg VU'_y$.

La relation de fermeture de la C.L.P.D. est applicable en $y = \epsilon$, soit

$$(\overline{uv})'_y = x_1 (U_1 U'_{1x} + VU'_{1y}) + x_2 = x_1 U_1 U'_{1x} + x_2 = 0 \quad 65$$

La figure (28) montre que la limite U_1 déterminée expérimentalement correspond bien à une valeur nulle de $(\overline{uv})'_y$, justifiant les hypothèses faites.

On a alors :

$$U_1 U'_{1x} \approx - \frac{x_2}{x_1} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = U_m U'_{mx}$$

Soit :

$$U_m^2 - U_1^2 = \text{Cte} \quad 66$$

Expression qui traduit la conservation des rotations moyennes ω dans la C.L.P.D. (et de la moyenne des rotations instantanées à un terme $\frac{\partial u'^2}{\partial y}$ près qui reste faible), en effet :

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \approx - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y}$$

alors :

$$\int_{y=0}^{y=\xi} U \cdot \omega \cdot dy \approx - \frac{1}{4} (U_m^2 - U_1^2) = \text{Cte} \quad 67$$

dans le cas où U_m est constant cette condition devient :

$$U_1 = \text{Cte} \quad 68$$

identique à la proposition faite par Hirsch, et qui s'introduit non plus comme hypothèse supplémentaire mais comme conséquence de la petitesse de la sous-couche relativement à la C.L.P.D., de plus elle permet d'envisager le raccordement avec une sous-couche non uniquement visqueuse, mise en évidence expérimentalement. On peut remarquer qu'on aurait pu faire le raisonnement suivant : la conservation des rotations, conséquence des simplifications de l'équation (34) en une équation d'Euler (42) conduit près de la paroi en y_0 à

$$(\overline{uv})'_{y=y_0} = 0 \quad 69$$

d'après la relation de fermeture choisie.

IX - CAS OU EXISTE UN GRADIENT LONGITUDINAL EXTERIEUR DE PRESSION

Nous trouvons également la condition de raccordement en présence d'un gradient de pression (satisfaisant aux hypothèses sur les ordres de grandeurs en x). Toutefois si $U_m(x)$ croît, U_1/U_m tend vers l'unité et ϵ tend vers δ . L'hypothèse sur la petitesse de ϵ n'étant plus valable nous devons donc nous limiter à ne considérer que des différences de vitesse $(U_m - U_g)/U_g$ faibles que l'on trouve le long du canal, les conditions de raccordement $U_m^2 - U_1^2 = Cte$ et $U_1/U_m = Cte$ étant alors peu différentes.

Dans le cas d'un gradient de pression défavorable l'apparition d'un changement de concavité du champ transversal des vitesses ne permet plus de vérifier les hypothèses faites sur les ordres de grandeur, et les vitesses transversales à la jonction peuvent ne plus être négligeables. Alors on ne peut plus simplifier la relation de fermeture :

$$(\overline{uv})'_y = x_1 (U_1 U'_{1x} + v U'_{1y}) + x_2$$

en négligeant le terme $v U'_y$ et la condition de jonction $U_1(x)$ sera différente.

Pour les travaux de Schubauer-Spangenberg /54/ par exemple, en gradient positif de pression, l'expérience montre que le critère $(U_m - U_1) = 0,2 U_g$ définit avec une bonne approximation un domaine où le champ des vitesses a les propriétés mises en évidence précédemment.

Remarquons enfin que dans un gradient défavorable important de pression les termes d'inertie peuvent être considérés comme prépondérants et le champ de vitesses dans la C.L.P.D. devient encore solution approchée d'une équation d'Euler comme l'ont montré Stratford et Townsend (voir Rotta /39/).

CHAPITRE VI

LOIS D'EVOLUTION DU FROTTEMENT LE LONG D'UNE PLAQUE PLANE SANS GRADIENT LONGITUDINAL DE PRESSION

I - LOI DE FROTTEMENT DEDUITE DES RESULTATS MIS EN EVIDENCE

Les hypothèses faites sur la zone de paroi et les résultats obtenus dans la zone de Hirsch permettent alors le calcul de la loi de frottement en fonction des grandeurs locales. Nous supposons que la loi de paroi décrit correctement le champ des vitesses jusqu'au raccordement avec la C.L.P.D. de Hirsch, ce que l'on vérifie expérimentalement bien. En ce point d'ordonnée y_0 les vitesses et les dérivées de vitesses obtenues par les deux lois sont égales. On a alors dans le cas où cette jonction se fait dans la zone logarithmique

$$U^+ = f(y^+) = A \operatorname{Log} \frac{y u_f}{\nu} + B$$

soit en y_0

$$U_1 = U_E g(0) = u_f A \operatorname{Log} \frac{y_0 u_f}{\nu} + B u_f$$

$$A \sqrt{\frac{C_f}{2}} \operatorname{Log} \frac{y_0 u_f}{\nu} + B \sqrt{\frac{C_f}{2}} = g(0) = g$$

$$\operatorname{Log} \frac{y_0 u_f}{\nu} = \left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A}$$

$$y_0 = \frac{\nu}{u_f} \exp \left[\left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right] \quad 70$$

$$\left[\frac{dU}{dy} \right]_{y=y_0} = \frac{A u_f}{y_0} = \frac{U_E}{\xi} g'(0) \quad \text{en posant } \xi = \delta - y_0$$

soit :

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \frac{g'(0)}{A} y_0 \quad 71$$

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \frac{g'(0)}{A} \frac{\nu}{u_f} \exp \left[\left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right]$$

ou

$$\frac{\xi u_f}{\nu} = R_{\text{ext}}^+ = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \frac{g'(0)}{A} \exp \left[\left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right] = R_{\text{ext}} \sqrt{\frac{C_f}{2}}$$

d'où la loi de frottement /55/

$$R_{\text{ext}} = \frac{2}{C_f} \frac{g'(0)}{A} \exp \left[\left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right] \quad 72$$

que l'on peut écrire sous une forme implicite plus classique :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = A_1 \operatorname{Log} R_{\text{ext}} \frac{C_f}{2} + B_1 \quad 73$$

avec

$$A_1 = \frac{A}{g} \quad B_1 = \frac{A}{g} \operatorname{Log} \frac{A}{g'} + \frac{B}{g}$$

pour nos mesures $g \approx 0,7$ $g'(0) \approx 0,22$.

(La loi déficitaire donnerait un frottement dans lequel interviendrait le produit $Re\sqrt{\frac{C_f}{2}}$ (Schultz - Grunow /22/).

Ce résultat va dans le sens d'une forme de la loi de frottement proposée par Mathieu /57/ rapportée aux paramètres de la jonction d'une loi de paroi et de sillage.

On peut également exprimer la loi (72) en fonction de Re . En tenant compte de la relation (70), on a :

$$Re_{\delta} = \left[\frac{2}{C_f} \frac{g'(0)}{A} - \sqrt{\frac{2}{C_f}} \right] \exp \left[\left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right] \quad 74$$

II - COMPORTEMENT AUX FORTES VALEURS DE Re - COMPATIBILITE AVEC LES LOIS ASYMPTOTIQUES CLASSIQUES

La loi de frottement :

$$R_{ext} = \frac{2}{C_f} \frac{g'(0)}{A} \exp \left[\left[g \cdot \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right]$$

montre que lorsque R_{ext} devient grand, C_f décroît et tend vers 0 ; (l'expérience montrant que $g\sqrt{\frac{2}{C_f}} - B$ est positif). Ce résultat est en accord avec les lois asymptotiques étudiées précédemment.

L'ordonnée de la fonction y_0 telle que :

$$y_0 = \frac{v}{u_f} \exp \left[\left[g \cdot \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \right] \quad 70$$

augmente le long d'une plaque plane baignée dans un écoulement de vitesse constante.

$$\text{Mais } \frac{y_0}{\xi} = \frac{A}{g'(0)} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \text{ tend vers zéro quand } Re \text{ tend vers}$$

l'infini vérifiant à postériori les hypothèses faites précédemment sur l'ordre de grandeur de la sous-couche pour traiter le problème de raccordement avec la C.L.P.D.

Enfin l'ordonnée réduite de la jonction :

$$y_o^+ = \frac{y_o u_f}{\nu} = \exp \left[\frac{1}{A} \left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \right] \quad 75$$

croît avec Re , fait expérimental bien connu traduisant le fait que la dimension de la zone logarithmique représentée en diagramme $U^+ = f(y^+)$ croît le long d'une plaque plane (figure 19).

Quand le nombre de Rynolds devient grand y_o/ξ est très faible et l'on commettra une erreur négligeable en confondant ξ et δ ($\delta = \xi + y_o$), donc en assimilant $Re_{ext} = \xi U_e/\nu$ et $Re = \delta U_e/\nu$.

La loi de frottement (73) devient ainsi :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} \simeq A_1 \text{Log } Re_\delta \frac{C_f}{2} + B_1 \quad 76$$

Nous avons montré par ailleurs que lorsque Re devient grand la loi asymptotique logarithmique de frottement doit s'appliquer. On a donc également :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \text{Log } Re_\delta \sqrt{\frac{C_f}{2}} + B \quad 11$$

Ecrivons l'équivalence de ces deux lois :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{C_f}} &= \text{Log} (Re_\delta C_f)^{A_1} + B'_1 = \text{Log} (Re_\delta \sqrt{C_f})^A + B' \\ \text{Log } Re_\delta^{A_1-A} C_f^{A_1-\frac{A}{2}} &= \text{Cte} \end{aligned}$$

$$\text{soit en posant} \quad \frac{A_1 - A}{A_1 - \frac{A}{2}} = \alpha \quad C_f = \frac{K}{Re_\delta^\alpha} \quad 77$$

forme dont nous avons également montré le caractère asymptotique et qui est équivalente à (11).

La loi de frottement proposée est donc bien compatible avec les formes asymptotiques classiques dont l'existence a été démontrée.

III - EVOLUTION DU FROTTEMENT AUX FAIBLES VALEURS DE Re

Inversement, si Re diminue, C_f croît, $\frac{y_0 u_f}{\nu}$ diminue, atteindra la limite inférieure du domaine de validité de la loi logarithmique et pénétrera dans la "Buffer-Layer" ($y^+ < 50$). Les formules calculées précédemment ne sont plus utilisables.

Il est alors possible de représenter à nouveau le champ des vitesses dans la "Buffer-Layer" par une autre forme logarithmique si la division en deux zones reste utilisable /53/. Il suffira alors de changer les coefficients A et B dans les expressions précédentes.

Nous sommes alors amenés à étudier le frottement juste avant le début d'une forme de transition laminaire avec les hypothèses précédentes. A la paroi le champ des vitesses est de la forme :

$$u^+ = y^+$$

A l'extérieur, on a une loi :

$$\frac{U}{U_m} = f\left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0}\right] \quad 21$$

On sait d'une manière différente par la résolution de Blasius que cette loi est valable jusqu'à la paroi.

Nous supposons que dans un domaine limité juste avant la transition on pourra considérer que le raccordement se fait encore le long d'une isovitesse $U_1 = Cte$, soit :

$$U_1 = \frac{u_f^2}{\nu} y_0 = U_e g(0) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{C_f}{2}} \frac{y_0 u_f}{\nu} = g(0)$$

et

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_f^2}{\nu} = \frac{U_e}{\xi} g'(0) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{C_f}{2}} \frac{\xi u_f}{\nu} = g'(0)$$

et en faisant la somme de ces dernières expressions

$$\sqrt{\frac{C_f}{2}} = \frac{(\xi + y_0) u_f}{v} = \sqrt{\frac{C_f}{2}} \frac{\delta}{v} = g + g'(0) = \frac{C_f}{2} \frac{\delta U_m}{v}$$

$$C_f = \frac{C_{te}}{Re_\delta}$$

78

L'évolution de l'ordonnée de la fonction est alors :

$$y_0 = \frac{v}{u_f} g(0) \sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{v}{U_m} g(0) \frac{2}{C_f}$$

et
$$\frac{\xi}{y_0} = \frac{g'(0)}{g(0)} = C_{te} = \frac{1}{\beta} \quad \text{soit} \quad y_0 = \beta \xi$$

La loi extérieure peut alors s'écrire :

$$\frac{U}{U_e} = g_1 \left[\frac{y - y_0}{\xi} \right] = g_1 \left(\frac{y}{\xi} \right) \quad \begin{array}{l} \text{comme } \delta = \xi + y_0 \\ \text{posons } \delta = \xi(1 + \beta) \end{array}$$

$$\frac{U}{U_e} = g_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)$$

La loi de paroi est :

$$\frac{U}{y_0} y = \frac{1 + \beta}{\beta} U_1 \frac{y}{\delta}$$

Le champ des vitesses dans la couche limite est donc une fonction de y/δ . Les différentes longueurs caractéristiques, épaisseur de couche limite δ , de déplacement δ_1 , de quantité de mouvement δ_2 sont alors proportionnelles /30/ .

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho U_e^2} = 2 \frac{d\delta_2}{dx} = 2A_2 \frac{d\delta}{dx} = 2A_2 \delta'_x$$

Pour une plaque plane à vitesse extérieure constante :

$$C_f = \frac{K}{\delta} = 2 A_2 \delta'_x$$

$$\delta \delta'_x = \frac{K}{2 A_2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{K}{A_2} x + c}$$

79

et

$$C_f = \frac{K}{\sqrt{\frac{K}{A_2} x + c}}$$

80

en écoulement laminaire on a $c = 0$, et on peut écrire :

$$C_f = \frac{K'}{\sqrt{Re x}}$$

81

Ainsi les hypothèses suivantes :

. Existence d'une loi de paroi $U^+ = y^+$ dans un certain domaine d'épaisseur y_0 variable,

. Existence à partir de cette distance y_0 d'une loi

$$\frac{U}{U_m} = g \left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0} \right] \quad (\text{donc en } y = y_0, \frac{U}{U_m} = \text{Cte})$$

. Identité des vitesse et dérivée de vitesse calculées par ces deux lois en y_0 ,

permettent également de retrouver la forme de la loi de frottement et de l'expansion de la couche limite laminaire issues de la résolution de Blasius.

Cette solution n'est utilisable que lorsque Re est suffisamment grand pour que la viscosité soit négligeable dans les zones

extérieures de la couche limite, ce qui est lié à la petitesse des gradients transversaux U'_y .

L'équation de Blasius se réduit alors à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + UU'_x \approx 0$$

Pour résoudre le problème en y on doit tenir compte de termes d'ordre plus faible ; c'est cette démarche qui conduit Hirsch à proposer sa solution ; cette dernière étant indépendante des paramètres x_1, x_2, x_3 (qui caractérisent l'action des fluctuations turbulentes) ce qui a été dit pour le champ de vitesse laminaire, s'applique également pendant et après la transition au champ de vitesses moyennes.

IV - AUTRES PROPRIETES DE LA C.L.P.D. - LA LOI DE FROTTEMENT LE LONG D'UNE PLAQUE PLANE N'EST PAS UNIQUE.

A - Comme nous avons montré que la loi (3[~]) obtenue : $U/U_e = f(\gamma/\xi)$ ne dépendait pas de x , les lois de vitesse moyenne (21) à l'extérieur d'une couche limite turbulente et de transition laminaire turbulent sont identiques à la loi représentant le champ laminaire correspondant qui la précède ; ce résultat peut être considéré comme une explication théorique d'une constatation expérimentale déjà faite par Clauser /26/ et que nous avons également vérifié sur nos résultats (figure 27).

B - Supposons maintenant que nous perturbions artificiellement la C.L.P.D. (sans modification des ordres de grandeur).

D'après la propriété d'indépendance de la solution en fonction du paramètre x , nous pouvons prévoir que cette perturbation va se propager très loin. Ce résultat expérimental est bien connu et qualifié de "propriété de mémoire longue des zones de sillage".

On constate également que sous l'action d'une perturbation de paroi croissante le profil expérimental turbulent de vitesse obtenu par différents expérimentateurs et déterminé par rapport à la vitesse $U_1 = 0,7 U_m$ s'écarte de plus en plus du champ laminaire de référence (figure 27). Nous avons vérifié que ces écarts étaient causés par une augmentation de la valeur U_1/U_m .

Il s'en suit que la loi de frottement (73) peut changer d'un montage à un autre et est fonction des conditions de formation de la couche limite et des perturbations qu'on y introduit.

C - On peut alors considérer le passage d'un état laminaire (corrélations $\overline{uv}$ nulles) à un état turbulent de la manière suivante :

Aux basses valeurs de Re , la viscosité est responsable de la création d'un champ de vitesse laminaire et de l'introduction de rotations dans celui-ci.

Quand Re augmente les gradients transversaux de vitesse dans la zone extérieure de la couche limite deviennent faibles. L'action de la viscosité devient négligeable et ne peut lier entre elles les différentes couches de fluides soumises à des perturbations.

Cette zone extérieure se comporte alors comme un fluide parfait rotationnel instable à partir duquel naît la turbulence.

Très récemment Kadomstev et Kostomarov /58/ ont montré par une simulation numérique d'un jet qu'il était effectivement possible de faire apparaître un phénomène très semblable à la turbulence dans un écoulement potentiel au voisinage de la discontinuité représentée par une distribution de tourbillons.

CHAPITRE VII

ETUDE DE LA ZONE DE MELANGE ET DE REGIME ETABLI LE LONG D'UN CANAL.

I - GENERALITES

Nous appelons zone de mélange la région de l'écoulement qui commence au moment où les couches limites se rejoignent dans la région centrale du canal et se "termine" lorsqu'on a obtenu le régime établi. On peut noter que si son origine est expérimentalement aisée à déterminer (bien que l'épaisseur d'une couche limite reste encore mal définie), nous considérons le régime établi comme une forme asymptotique vers laquelle on tend lorsqu'on s'éloigne de l'origine de la zone de mélange ; on en est proche à une distance de l'entrée correspondant à environ 100 fois la hauteur du canal (entrée symétrique avec collecteur et bandes de transition).

Une telle représentation apparaît donc plus complexe que des descriptions simples qui expliquent que le champ des vitesses du régime établi est pratiquement atteint au moment où les couches limites

se rejoignent, et Douchez /48/ propose une relation permettant de déterminer une longueur L_e d'établissement de la forme :

$$\frac{L_e}{D} = 5(Re)^{1/4}$$

82

Dans ce cas simplifié, les lois déficitaires de couche limite et de régime établi représentées en diagramme semi-logarithmique se correspondraient en ce point de jonction d'abscisse L_e et se déduiraient l'une de l'autre par une translation faisant correspondre δ à D . L'expérience montre que ce n'est pas le cas (figure 23).

Afin d'expliquer ces écarts Schubauer /41/ propose de faire intervenir l'influence du phénomène d'intermittence et nous avons déjà indiqué que la détermination transversale de γ était peu sûre en couche limite et ne permet pas d'expliquer la phase de réorganisation du champ de vitesse (voir Hinze /4/ figure 7-18 p. 494 et Kestin-Richarson /60/ figure 7 p. 159). Par contre l'exploitation des résultats mis en évidence en couche limite avec gradient léger de pression nous a permis de proposer un lien entre couche limite et régime établi dont nous avons montré la nécessité lors de la présentation des résultats expérimentaux.

II - EXTENSION A LA ZONE DE MELANGE DE L'ETUDE FAITE SUR LA COUCHE LIMITE TURBULENTE

L'étude faite sur la couche limite avec gradient de pression peut s'appliquer à l'entrée du canal jusqu'à l'origine de la zone de mélange en une abscisse pour laquelle l'expérience montre que les dérivées (U'_x) peuvent être considérées comme nulles pour toute ordonnée y .

Examinons alors le comportement de l'écoulement à partir de ce point (figures 12 à 16). On constate que les vitesses diminuent dans la région centrale et augmentent près de la paroi, mais les gradients longitudinaux semblent bien rester du même ordre de grandeur que ceux mesurés dans la zone de couche limite.

Les gradients transversaux diminuent dans la zone centrale mais comme précédemment leur ordre de grandeur n'est pas modifié et reste supérieur à celui des dérivées en x .

Il apparaît donc possible de reprendre une simplification des équations de Navier semblable à celle déjà appliquée à la couche limite. Appelons donc comme précédemment C.L.P.D. la zone centrale d'épaisseur ξ , dans le cas d'un écoulement symétrique en canal d'épaisseur $2D$, on a :

$$\xi = D - y_0$$

y_0 étant l'épaisseur de la sous-couche où l'on supposera que s'appliquent les mêmes hypothèses sur V .

Définissons enfin comme précédemment les relations de fermeture :

$$(\overline{uv})'_y = \chi_1 (uu'_x + vv'_y) + \chi_2$$

$$(\overline{v^2})'_y = -\chi_3 (uv'_x + vv'_y)$$

On peut alors représenter le champ de vitesse dans cette nouvelle C.L.P.D. par une loi g qui ne dépend que du paramètre Y/ξ et qui est définie par les conditions initiales, c'est-à-dire le champ de vitesse à l'origine de la zone de mélange,

on a alors :

$$\frac{U - U_1}{U_m - U_1} = g\left(\frac{Y}{\xi}\right)$$

où U_1 est la vitesse à la frontière C.L.P.D. - sous-couche.

Au centre du canal la première équation de Navier devient

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + (1 + x_1) U_m U'_x + x_2 = 0 \quad 83$$

V étant nul par raison de symétrie.

A la frontière avec la sous-couche les hypothèses sur les ordres de grandeur s'appliquent comme en couche limite : la brusque décroissance de U'_y conduit à considérer le terme VU'_y négligeable devant UU'_x et l'on a en y_0

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + (1 + x_1) U_1 U'_x + x_2 = 0 \quad 84$$

D'où l'on tire une relation de conservation des rotations

$$U_m^2 - U_1^2 = \text{Cte} \quad 85$$

qui définit la condition de raccordement avec la sous-couche.

Cependant nous ne pouvons plus associer à cette relation de raccordement une condition sur $(\overline{uv})'_y$ identique à celle définie en couche limite, soit :

$$(\overline{uv})'_{y=y_0} = 0 \quad 86$$

On aurait, en effet, en appliquant la relation de fermeture en y_0

$$U_1 U'_x = - \frac{x_2}{x_1} \quad 87$$

d'où d'après la relation (85)

$$U_m U'_{mx} = - \frac{x_2}{x_1} \quad 88$$

En effet, quand on tend vers le régime établi $U'_m U'_{mx}$ devient nul, donc

$x_2 \rightarrow 0$ ce qui entraîne $\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow 0$. L'expérience montre que ce n'est pas vrai.

Comme on ne peut pas considérer non plus qu'en régime établi la viscosité devient prépondérante et de l'ordre de grandeur de $\partial P / \partial x$, ce qui reviendrait à supposer l'écoulement laminaire, on doit considérer que dans la C.L.P.D. en régime établi (dérivées en x toutes nulles), on aura :

$$(\overline{uv})'_y = x_2 = \text{Cte non nulle} \quad 89$$

L'évolution expérimentale de $\overline{uv}$ à l'abscisse $x/D = 145$ pour $Re = 39\,000$ représentée sur la figure (28) montre le bien fondé de cette hypothèse.

Comme précédemment nous pouvons raccorder cette C.L.P.D. à une zone logarithmique dont l'expérience confirme l'existence, soit

$$U^+ = A \log y^+ + B$$

Cependant on peut remarquer qu'on associe souvent à cette loi et de façon empirique la condition $\overline{uv} = \text{Cte}$, soit $(\overline{uv})'_y = 0$.

En réalité $(\overline{uv})'_y$ passe de la valeur x_2 en y_0 à une valeur nulle puis négative quand on se rapproche de la paroi. On retrouve là un problème semblable à celui déjà étudié pour expliquer les différences mesurées entre les lois de paroi en fonction du nombre de Reynolds. Comme nous avons vu que les corrections étaient faibles, nous continuerons à les négliger.

III - DETERMINATION DE LA LOI REPRESENTATIVE DU CHAMP DE VITESSES EN REGIME ETABLI

La solution de l'équation aux rotations se présente sous la forme d'une série dont les coefficients K_n seront connus si l'on sait déterminer une solution en un point par une autre voie. C'est ce que nous avons fait en nous ramenant au champ laminaire qui précède l'état turbulent, cependant nous avons remarqué que la solution de Blasius

ne s'appliquait peut être pas très bien à l'extérieur d'une couche limite laminaire, ce qui peut expliquer les légers écarts entre les résultats expérimentaux de Nikuradse et la solution numérique /40/ pour $0,95 < U/U_e < 1$.

D'autre part, l'indépendance de la solution vis à vis de U_1 nous a suggéré que cette solution pouvait correspondre à une loi puissance.

Considérons maintenant le cas limite du régime établi pour lequel les dérivées en x de la vitesse sont absolument nulles, dP/dx étant alors constant ainsi que $\chi_2 = (\overline{uv})'_y$.

Comme $\chi_2 = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ et α est différent quoique voisin de -1 , on ne pourra satisfaire l'hypothèse

$$U_m U_{mx}' \equiv 0$$

que si l'on introduit une action très faible de la viscosité. On aura alors l'équation de régime établi

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \chi_2 = \nu U_{yy}'' \quad 90$$

soit
$$U_{yy}'' = \frac{1}{\nu} \frac{dP}{dx} + \frac{\chi_2}{\nu}$$

qu'on intègre directement :

$$U(y) = U_m - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\nu} \frac{dP}{dx} + \frac{\chi_2}{\nu} \right] \left[\xi - Y \right]^2$$

et

$$\frac{U(y) - U_1}{U_m - U_1} = g\left(\frac{Y}{\xi}\right) = 2 \frac{Y}{\xi} - \left(\frac{Y}{\xi}\right)^2 \quad 91$$

avec $Y = y - y_0$ $\xi = D - y_0$ en écoulement symétrique.

La courbe représentative de cette équation est notée en pointillé sur la figure (29) et comparée au champ expérimental de vitesse déterminé en supposant l'écoulement établi symétrique soit $\xi = D - y_0$.

Dans ce cas la concordance peut être considérée comme acceptable, la pente à l'origine ayant bien une valeur voisine de 2.

Par contre on a un écart faible mais systématique au-delà de $Y/\xi > 0,4$.

Reportons-nous alors à la figure (28) donnant l'évolution $(\overline{uv}) = f(y)$.

On constate que $(\overline{uv})$ s'annule pour $y/D = 1,04$, donc qu'on a une légère dissymétrie de l'écoulement.

Nous devons donc modifier la valeur de ξ en conséquence, ce qui entraîne une correction qui déplacerait le point $\frac{U - U_1}{U_m - U_1} = 0,71$ de l'abscisse $Y/\xi = 0,5$ à $Y/\xi = 0,475$, qui est alors parfaitement superposé à la parabole théorique comme on le constate sur la figure (30).

On peut noter que certains auteurs ont utilisé une telle représentation de manière empirique soit explicitement /13//3//40/ soit en admettant l'existence d'une viscosité cinématique turbulente ν_t sensiblement constante dans la zone centrale du canal (Bord /61/).

L'introduction de cette viscosité cinématique turbulente ν_t reliant le gradient de pression dP/dx au gradient de vitesse dU/dy permettrait également de déduire une loi de vitesse /4//62/ mais on sait qu'elle décrit mal le mécanisme de transfert turbulent.

On peut remarquer que nous avons obtenu cette loi de vitesse sans recourir à cette notion. De plus ce résultat met en évidence l'action toujours sous-jacente de la viscosité qui vient de nous permettre de déterminer la loi de vitesse dans les C.L.P.D. à partir de l'étude du régime établi, et dont nous avons déjà implicitement reconnu l'action en ramenant le champ turbulent d'une couche limite au champ laminaire qui le précède.

IV - REMARQUES SUR LE CRITERE DE JONCTION AVEC LA SOUS-COUCHE LE LONG DU CANAL

Lors de l'étude d'une couche limite, nous avons été conduits à repérer la frontière avec la sous-couche par le critère : $(\overline{uv})'_y = 0$, lié à la conservation des rotations dans la C.L.P.D. correspondant pour une couche limite sans gradient de pression à une isovitesse $U/U_g = U^* = \text{Cte}$ et dans le cas où existe un léger gradient longitudinal de vitesse au critère :

$$U_m^2 - U_1^2 = \text{Cte} = U_g^2 - U_{10}^2 \quad 92$$

Nos expériences montrent que cette frontière correspond à une isovitesse U^* telle que $0,65 < U^* < 0,7$ soit :

$$0,51 U_g^2 < U_m^2 - U_1^2 < 0,58 U_g^2 \quad 93$$

et $(\overline{uv})'_{y=y_1} = 0$

et l'on constate sur la figure 28 qu'à l'ordonnée de cette isovitesse réduite correspond bien un maximum de $(-\overline{uv})$ confirmant les hypothèses de raccordement que nous avons faites précédemment.

Prolongeant l'étude dans la zone de mélange nous venons de montrer que ce critère de conservation pouvait toujours s'employer et correspondait en régime établi à une frontière où $(\overline{uv})'_y$ était constant (non nul), (l'équation de Bernoulli n'étant plus applicable au-dessus de la C.L.P.D.).

L'expérience montre alors que la vitesse frontière est telle que :

$$U_m^2 - U_1^2 \approx 0,36 U_g^2 \quad 94$$

soit en régime établi : $\frac{U_1}{U_m} \approx 0,85 \quad (y_0/D \approx 0,28)$

(le critère précédent donnerait $\frac{U_1}{U_m} \approx 0,79$). Il lui correspond avec une très bonne approximation en régime établi la frontière du domaine (C.L.P.D.) où $(\overline{uv})'_y$ est constant (figure 28).

Toutefois, malgré cet accord localement très bon, le critère de conservation des rotations fait apparaître deux constantes différentes en couche limite (C.L.) et en zone de mélange (Z.M.).

Remarque :

En réalité la vitesse U_e à l'entrée du canal n'est pas la vitesse du fluide avant le développement de la couche limite, mais est légèrement supérieure. En étudiant le cas d'une plaque plane, nous pensons préférable de prendre $U_1/U_e = 0,6$, soit :

$$U_m^2 - U_1^2 \approx 0,64 U_e^2$$

Enfin quand $U_m(x)$ croît U_1/U_m croît, ce qui nous a certainement "aidé" à définir explicitement deux zones de couche limite séparées par une frontière.

Etudions alors ce qui se passe à la jonction des couches limites, qui est également à l'abscisse d'origine de la zone de mélange et où les relations définies en couche limite et en zone de mélange doivent s'appliquer simultanément.

D'après les hypothèses faites sur les conditions de jonction des C.L.P.D. avec la sous-couche (en CL et en ZM) , on doit avoir en deux ordonnées très différentes y_{oCL} et y_{oZM} pour lesquelles les vitesses de jonction sont U_{1CL} et U_{1ZM} :

$$V(y_{oCL}) = V(y_{oZM}) \approx 0$$

Nous avons vu que cette section ($x/D \approx 70$) se caractérisait par une inversion de l'évolution du champ des vitesses (figure 12) où en toute ordonnée on peut considérer que :

$$U'_x(y) \equiv 0$$

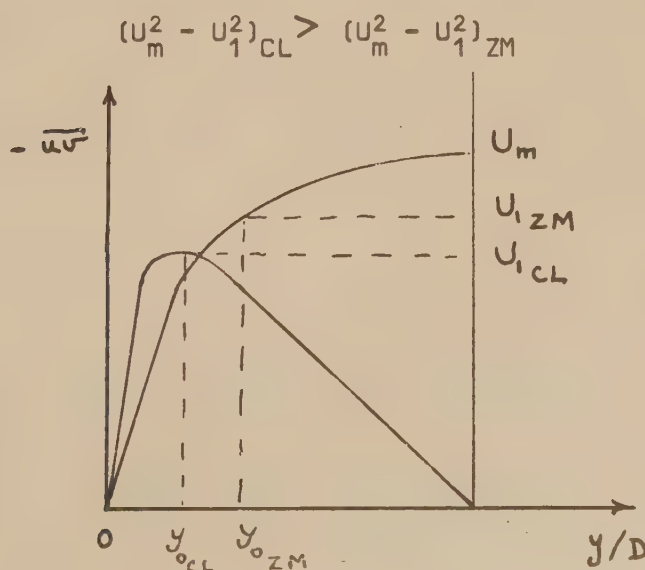
Donc d'après l'équation de continuité $V_y' = 0$ et par intégration $V(y) = 0$ ce qui justifie la possibilité d'avoir les deux conditions de jonction valables simultanément en y_{oCL} et y_{oZM} .

Dans la zone de couches limites en canal, juste avant la jonction de celles-ci ($x/D = 70$) nous avons été conduits à préciser que le raccordement de la C.L.P.D. avec la sous-couche (définissant la condition de conservation des rotations quand la relation de Bernoulli s'applique à l'extérieur de la C.L.P.D.) conduit à :

$$(\overline{uv})_y'(y_1) = 0$$

Juste après cette jonction en zone de mélange, les dérivées en x sont nulles. L'équation du mouvement est alors localement celle du régime établi, et la jonction avec la sous-couche correspond alors à la frontière où $(\overline{uv})_y' = \chi_2$ cesse d'être constant.

$(\overline{uv})(y)$ et $U(y)$ étant continus dans ce domaine, on en déduit immédiatement comme on l'a représenté sur le schéma suivant que la valeur de l'ordonnée y_{oCL} est plus faible que y_{oZM} et donc que la constante du critère de conservation des rotations en couche limite est supérieure à celle de la zone de mélange



Ainsi l'étude faite dans la zone de mélange apparaît comme un nouveau cas où s'applique la solution de Hirsch issue d'une perturbation de l'écoulement (jonction des couches limites) et non comme le prolongement de l'évolution de la 1ère zone de développement des couches limites.

V - CONSEQUENCES

Rappelons rapidement les résultats obtenus jusqu'à présent :

Dans une couche limite turbulente qui se développe le long d'un canal, le champ extérieur des vitesses moyennes est identique au champ laminaire qui le précède. Cette zone prend fin quand les couches limites se rejoignent, les dérivées en x étant alors localement toutes nulles.

Elle est suivie d'une région de réorganisation où le champ des vitesses moyennes est déterminé par la loi de vitesse à la jonction des couches limites. Elle est donc identique à la première, mais nous avons montré que la frontière avec la sous-couche devait être redéfinie.

L'étude du régime établi nous a permis de représenter cette loi extérieure (de sillage) par une forme parabolique, qui doit donc être valable tout au long du canal et définit une relation liant l'écoulement établi aux conditions à l'entrée du canal, que nous recherchions.

La frontière de la C.L.P.D. étant déterminée en zone de mélange et en régime établi par l'axe du canal le long duquel on a :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{U}} = 0$$

L'identité du champ de vitesse dans cette zone et en couche limite conduit également à admettre pour cette dernière l'existence d'une frontière extérieure précise Δ pour laquelle on a également $\overrightarrow{\text{rot } \vec{U}} = 0$.

Ceci nous conduit à abandonner l'hypothèse d'une couche limite d'épaisseur indéfinie présentée dans les théories classiques /40/ qui oblige à définir arbitrairement une échelle de longueur δ correspon-

dant à une vitesse constante, par exemple $0,99 U_e$. Par contre on peut présenter cette longueur δ telle que $(\delta - y_0)$ soit proportionnel à l'épaisseur Δ de la C.L.P.D.

La figure 30 représente les résultats expérimentaux obtenus en zone de mélange pour différentes Re et en couche limite pour les valeurs de Re_δ déjà définies sur la figure (26) ($Re_\delta = 9000, 17\ 000, 32\ 000, 70\ 000$), comparée à la forme parabolique théorique (trait plein). L'accord peut être considéré comme très bon.

VI - REMARQUE SUR LES ECOULEMENTS DISSYMETRIQUES EN CANAUX

Ayant relié le régime établi aux conditions de formation de la couche limite à l'entrée du canal, on s'explique l'existence de régimes "établis dissymétriques" que nous avons rencontrés lors de la mise au point de notre montage.

La loi de vitesse étant déterminée dès l'entrée du canal, les perturbations à l'entrée du canal doivent agir sur les conditions de raccordement avec la sous-couche qui, si elles sont différentes sur chaque face conduisent bien à l'existence d'un écoulement établi dissymétrique.

On peut remarquer que Hanjalic et Launder /63/ qui ont étudié un tel écoulement dissymétrique provoqué par des rugosités sur une des faces d'un canal rectangulaire affirment qu'en régime établi $(\overline{uv})$ ne s'annulerait pas en même temps que dU/dy , alors qu'ils supposent $(\overline{uv})'_y$ constant dans cette zone du canal. On peut s'étonner d'un tel résultat bien différent de celui que l'on trouve en jet pariétal près du maximum de vitesse où les termes en $(UU'_x + VU'_y)$ sont non nuls /64/ /65/ /66/ /10/.

Si l'on suppose le régime établi atteint, on aurait un écoulement d'équation :

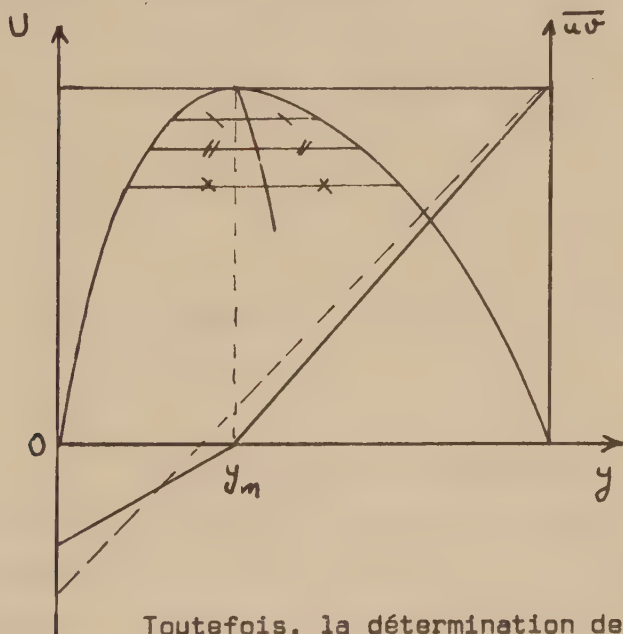
$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + (\overline{uv})'_y - \nu U''_{y^2} = 0$$

dP/dx étant constant, si l'on suppose $(\overline{uv})'_y$ constant, le terme $\nu U''_{y2}$ est aussi constant soit :

$$U''_{y2} = \text{Cte}$$

En intégrant à partir du maximum de vitesse (ordonnée y_m), on conclut que le champ de vitesse est symétrique par rapport au point de vitesse maximum, à cause de l'action de la viscosité, ce qui ne semble pas le cas.

Nos résultats permettent d'envisager deux valeurs $(\overline{uv})'_y$ différentes de part et d'autre de ce maximum (y_m). La valeur de $(\overline{uv})'_y$ la plus faible étant liée à la zone où les gradients de vitesse sont plus forts (schéma ci-contre) :



Si l'on trace la meilleure droite représentant $(\overline{uv})(y)$ on aboutit à un déplacement du point $(\overline{uv}) = 0$ de même sens que celui déterminé par ces auteurs, mais qui devrait être très faible. La dispersion des points expérimentaux causée par les difficultés de mesure rend l'étude délicate.

Toutefois, la détermination de l'ordonnée y_m de U_m comme intersection de lieu des points joignant le milieu des cordes parallèles à l'axe Oy donnerait une valeur identique aux erreurs expérimentales près à l'ordonnée correspondant à $\tau_y = 0$ (figure 3-1, rapport BL/TN/B/41). D'autre part, on peut déceler des variations de la pente de $(\overline{uv})'_y$ de part et d'autre de cette ordonnée (figure 43, BL/TN/B/41). (On peut remarquer que les expériences ont été menées pour des valeurs relativement faibles de Re , où on sait que la viscosité peut intervenir légèrement).

CHAPITRE VIII

ETUDE DE QUELQUES PROPRIETES THERMIQUES DE L'ECOULEMENT LE LONG D'UN CANAL.

I - ETUDE EXPERIMENTALE DE L'EVOLUTION DU TRANSFERT DE CHALEUR LE LONG DU CANAL

Nous avons montré précédemment (Chapitre III, § VI) qu'au niveau de la jonction des couches limites le frottement pariétal augmentait d'environ 10 % par suite de la réorganisation du champ des vitesses. Nous avons donc recherché l'incidence que pouvait avoir ce résultat sur l'évolution du coefficient pariétal d'échange thermique.

Pour cela, nous avons raccordé bout à bout les deux plaques chauffantes (soit une longueur du modèle chauffant de 1,5 m ou 60 D) que nous avons disposées le long du canal en des abscisses comprises entre :

- . 0 et 60 D : les champs thermique et dynamique ont alors même origine,
- . 20 et 80 D : le champ thermique se développe dans une zone de couche limite où u_f est sensiblement constant,

- . 40 et 100 D : correspond à la zone de mélange,
- . 100 à 160 D : régime établi, u_f constant.

Ces expériences ont été menées à un nombre de Reynolds de $Re = 47\,700$, pour une densité de flux de chaleur dissipée de $\phi = 64.10^{-3} \text{ W/cm}^2$. Le champ thermique n'atteignant pas le plan médian horizontal du canal, la température le long de ce dernier était celle de l'entrée du canal T_e . La température de la plaque T_p était alors telle que $T_p - T_e < 9^\circ\text{C}$, ce qui nous permettait de supposer les propriétés physiques du fluide constantes, dans le cas contraire il faudrait tenir compte de l'influence de la température sur les paramètres caractérisant le fluide à la paroi (Bord /67/).

Les résultats montrant l'évolution du nombre de Margoulis :

$$m = \frac{\phi}{\rho C_p U_e (T_p - T_e)}$$

sont présentés sur la figure (31) en fonction de la distance à l'origine du modèle chauffant pour ses différentes positions le long du canal.

On constate que l'évolution de m est proche de l'évolution du frottement pariétal. En particulier en régime dynamique établi, on tend vers une valeur asymptotique de m supérieure d'environ 10 % à la valeur correspondante obtenue en couche limite.

Ainsi, contrairement à ce que proposent des études classiques /20/ il apparaît nécessaire de tenir compte d'une légère augmentation du coefficient d'échange dans la zone de mélange.

II - ETUDE D'UN CHAMP THERMIQUE QUI SE DEVELOPPE A L'ENTREE DU CANAL EN MEME TEMPS QUE LA COUCHE LIMITE DYNAMIQUE

A - Evolution des coefficients d'échange

L'évolution du coefficient d'échange :

$$\alpha = \frac{\phi}{T_p - T_e}$$

est représentée sur la figure (31) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.

On remarque pour la valeur la plus faible de ce paramètre une croissance de α en fonction de x/D entre $20 < x/D < 50$ correspondant au passage d'une zone laminaire ($x/D < 20$) à une zone turbulente. Il apparaît cependant difficile d'exploiter davantage ces résultats, car nous n'étudions pas une configuration assez simple pour s'appuyer sur un concept tel que celui d'analogie de Reynolds.

B - Evolution de la couche limite thermique

Reprenant une étude semblable à celle faite en dynamique, nous nous sommes intéressés à l'évolution de la couche limite thermique. Nous avons choisi de faire nos mesures pour un nombre de Reynolds de 47 500, valeur pour laquelle l'approximation en faisceau de droite du champ dynamique peut être appliquée à la plus grande partie de la couche limite. Le champ thermique est en effet délicat à mesurer dans les zones extérieures et il importe, de rechercher autant que possible des corrélations qui assurent une précision suffisante des résultats.

Considérons alors la loi déficitaire du champ de température souvent proposée /24/

$$T^+ - T_e^+ = f(y/\delta)$$

en posant

$$T^+ = \frac{\rho C_p u_f T}{\phi}$$

Nous pouvons considérer comme nous l'avons déjà fait en dynamique que cette représentation est peu affectée par le léger gradient longitudinal de pression. D'autre part, nous supposerons que δ est le même que celui défini auparavant.

On a encore :

$$T - T_e = \frac{\phi}{\rho C_p u_f} g(y/\delta)$$

dans un domaine où u_f est constant ($\phi = \text{Cte}$)

$$T - T_e = G(y/\delta)$$

comme $\delta = K(x + x_0)$ (validité de l'approximation faisceau)

$$T - T_e = G\left[\frac{y}{(x + x_0)}\right] \quad 99$$

L'expérience montre que l'on trouve localement une loi de la forme :

$$T - T_e = G\left[\frac{y - y'_0}{x + x'_0}\right] \quad 100$$

où x'_0 est différent du x_0 déterminé lors de l'étude dynamique.

y'_0 est tel que l'origine du faisceau thermique est située sous la plaque ($y'_0/D \approx -0,08$).

Ainsi la représentation déficitaire du champ thermique semble elle aussi approchée.

L'étude dynamique nous a amenés à diviser l'écoulement en deux zones de paroi et de C.L.P.D. et nous a permis de définir les lois d'évolution de leurs frontières. Nous avons montré que si dans le cas simple de la plaque plane sans gradient longitudinal de pression il était possible de représenter le champ dynamique par une loi en U/U_m , une modification des conditions aux limites obligeait à rapporter le champ dynamique de la C.L.P.D. à une référence de vitesse située à la frontière de la sous-couche et de cette C.L.P.D. Nous avons donc essayé de reprendre une représentation semblable du champ thermique. En effet, on a dans la sous-couche une influence du nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$, alors qu'au-delà de la frontière avec la C.L.P.D. les phénomènes de transfert turbulent sont prépondérants.

Nous avons donc cherché à séparer l'action de la sous-couche en étudiant une représentation de la forme :

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_e} = f \left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0} \right] \quad 101$$

où T_1 est la température le long de l'isovitesse réduite $U_1/U_m = 0,7$,
 y_0 l'ordonnée de l'isovitesse U_1

δ l'épaisseur de couche limite dynamique, qui se développe en même temps que la couche limite thermique ($U(\delta) = 0,99 U_m$).

Les résultats sont présentés sur la figure (33), et montrent que les représentations thermique (points expérimentaux) et dynamique (trait plein) (figure 26) peuvent être considérés comme confondus avec une très bonne approximation.

C - Remarques sur le résultat obtenu pour la couche limite thermique

L'expérience montrant que dans les zones extérieures de la couche limite les transferts turbulents sont très grands devant les

transferts moléculaires (sauf peut-être dans le cas des métaux liquides) , on négligera en général ces derniers. Comme par ailleurs existe une frontière au-delà de laquelle le fluide n'est plus turbulent on peut affirmer que cette frontière limitera le domaine où se font les transferts turbulents. Il est alors difficile d'imaginer que le champ thermique soit plus important que le champ dynamique limité par Δ et l'on peut préciser qu'un des résultats obtenus permet de déterminer cette frontière.

Toutefois si l'on définit de manière classique une épaisseur de couche limite δ correspondant à $U(\delta) = 0,99 U_\infty$ et thermique δ_t rapportée aux valeurs de paroi correspondant à $[T_p - T(\delta)] / [T_p - T_e] = 0,99$, on pourra quand même continuer à dire que l'une est plus épaisse que l'autre quand les champs thermique et dynamique ont même frontière Δ , si les phénomènes thermique et dynamique sont différents près de la paroi où l'on sait qu'on a influence du nombre de Prandtl Pr différent de 1. Dans ce cas on rapporte le phénomène à des références situées dans une zone où les hypothèses faites ne sont plus valables : T_p température de référence est située dans une zone où les transferts par viscosité et conduction sont prépondérants.

Enfin une justification plus précise de la relation entre champ thermique et dynamique apparaît délicate à formuler : l'hypothèse d'une action prépondérante des termes d'inertie, rend difficile la définition d'une analogie sur les termes de transfert turbulent, donc de la signification physique d'un nombre de Prandtl turbulent. (Certains auteurs affirment qu'il n'y en a pas et qu'il s'agit seulement d'un paramètre commode à employer /13/.

Nous n'avons pas voulu chercher à justifier de manière plus précise cette correspondance entre vitesses et températures. On ne pourrait le faire qu'en recherchant une meilleure connaissance, expérimentale et théorique du mécanisme de transfert :

Afin de mieux délimiter le domaine d'application des résultats que nous proposons il serait souhaitable de préciser l'influence sur les champs dynamiques et thermiques du nombre de Prandtl et des conditions imposées à la paroi (influence de la rugosité, densité de flux de chaleur évoluant fortement avec l'abscisse).

Enfin il apparaît indispensable d'approfondir l'étude des rapports entre le modèle et par exemple la théorie hydrodynamique des fluides parfaits rotationnels dans le cas où les gradients transversaux de vitesse sont faibles.

III - LOI D'EVOLUTION DU COEFFICIENT D'ECHANGE LE LONG D'UNE PLAQUE PLANE

La connaissance du champ thermique transversal près de la paroi permet alors, en reprenant un raisonnement semblable à celui présenté dans l'étude dynamique de déterminer l'évolution de la température et du coefficient d'échange le long de la plaque chauffante.

Nous n'avons pas pu mesurer les températures près de la paroi car le diamètre du thermocouple utilisé (0,1 mm) ne permettait pas une résolution spatiale suffisante. Cependant, des mesures faites dans des tubes (Taccoen /13/) ou le long de plaque plane (D.B. JOHNSON /68/) montrent qu'on peut également accepter une loi de la forme :

$$T_p^+ - T^+ = A_\theta \text{ Log } y^+ + B_\theta \quad 102$$

A_θ semblant légèrement inférieur au A de la loi dynamique.

B_θ est fonction du nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$.

Nous supposons désormais que l'évolution des conditions à la paroi (flux ou température) est suffisamment lente pour que cette loi soit toujours vérifiée.

Les propriétés physiques du fluide étant supposées indépendantes de la température, les relations (70) à (75) sont toujours utilisables.

On aura alors à la jonction sous-couche/C.L.P.D. d'ordonnée y_0 telle que :

$$y_0 = \xi \sqrt{\frac{C_f}{2}} \frac{A}{g'} = \frac{v}{u_f} \exp \left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} \quad 70$$

une température telle que

$$T_p^+ - T_1^+ = A_\theta \operatorname{Log} \frac{y_0 u_f}{v} + B_\theta = A_\theta \left[g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] \frac{1}{A} + B_\theta \quad 103$$

Appelons nombre de Prandtl turbulent Pr_t le rapport $Pr_t = \frac{A_\theta}{A}$ /13/ sans faire aucune hypothèse sur son rapport avec les transferts, alors :

$$T_p^+ - T_1^+ = Pr_t g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B Pr_t + B_\theta \quad 104$$

Le gradient de température en y_0 étant alors tel que :

$$\left. \frac{dT^+}{dy} \right)_{y=y_0} = - \frac{A_\theta}{y_0} = - \frac{A_\theta}{\xi \sqrt{\frac{C_f}{2}} \frac{A}{g'}} \quad 105$$

Dans la C.L.P.D. l'expérience confirme que la loi de température prend la forme :

$$\frac{T - T_1}{T_e - T_1} = \frac{U - U_1}{U_m - U_1} = 2 \frac{Y}{\xi} - \frac{Y^2}{\xi^2} \quad 106$$

et le gradient de température est

$$\frac{dT}{dy} = (T_e - T_1) \left(\frac{2}{\xi} - \frac{2Y}{\xi^2} \right)$$

d'où en y_0 ($Y = 0$)

$$\frac{dT}{dy} = \frac{\phi}{\rho C_p u_f} Pr_t g' \frac{1}{\xi \sqrt{\frac{C_f}{2}}} = \frac{2}{\xi} (T_e - T_1)$$

$$T_e - T_1 = - \frac{\phi}{\rho C_p u_f} Pr_t \frac{g'}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{C_f}{2}}}$$

et

$$\begin{aligned} T_p - T_e &= \frac{\phi}{\rho C_p u_f} \left[Pr_t g \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B Pr_t + B_\theta + Pr_t \frac{g'}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{C_f}{2}}} \right] \\ &= \frac{\phi}{\rho C_p u_f} \left[Pr_t \sqrt{\frac{2}{C_f}} \left(g + \frac{g'}{2} \right) - B Pr_t + B_\theta \right] \end{aligned}$$

posons

$$U_1 = \alpha U_m \quad \text{alors} \quad \frac{U - U_1}{U_m - U_1} = 2 \frac{Y}{\xi} - \frac{Y^2}{\xi^2}$$

conduit à

$$\frac{U}{U_m} = \alpha + 2(1 - \alpha) \frac{Y}{\xi} - (1 - \alpha) \frac{Y^2}{\xi^2} = g\left(\frac{Y}{\xi}\right)$$

en $Y = 0$

$$g(0) = g = \alpha \quad g'(0) = g' = 2(1 - \alpha)$$

donc $g + \frac{g'}{2} = 1$ ne dépend pas de α .

107

On a alors :

$$T_p - T_e = \frac{\phi}{\rho C_p u_f} \left[Pr_t \left[\sqrt{\frac{2}{C_f}} - B \right] + B_\theta \right]$$

108

et le nombre de Margoulis devient :

$$m = \frac{\phi}{\rho C_p U_m (T_p - T_e)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{C_f}} \left[Pr_t \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B Pr_t + B_\theta \right]}$$

$$m = \frac{C_f/2}{Pr_t \left[1 - \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left[B - \frac{B_\theta}{Pr_t} \right] \right]} \quad 109$$

On peut remarquer que la présence d'une épaisseur y_1 de sous-couche posée arbitrairement telle que $y_1^+ = 5$ dans les théories de Prandtl et de Karman /53/ a disparu dans l'expression que nous proposons. Ceci est la conséquence de la forme parabolique du champ extérieur de vitesse qui conduit à la relation $(g + g'/2) = 1$, indépendante de la valeur de U_1 .

Application

Nous avons montré que lorsque Re devient assez grand, les lois asymptotiques de frottement et la loi que nous avons présentée étaient équivalentes. On a alors $\xi \approx \delta$ et nous pouvons choisir la plus simple c'est-à-dire la loi puissance. On a alors

$$C_f \approx 0,0584 Re_x^{-0,2} \quad 110$$

d'où

$$m \approx \frac{0,0292 Re_x^{-0,2}}{Pr_t \left[1 - 0,17 Re_x^{-0,1} \left[B - \frac{B_\theta}{Pr_t} \right] \right]} \quad 111$$

dans le cas où Re_x devient grand $C_f \rightarrow 0$

$$m \approx \frac{0,0292 Re_x^{-0,2}}{Pr_t} \quad 112$$

On a alors :

$$Nu_x = \eta Re Pr \approx \frac{0,0292 Re_x^{0,8} Pr}{Pr_t} \quad 113$$

On retrouve ainsi une loi classique malgré des hypothèses de départ sensiblement différentes.

Il serait nécessaire pour pousser plus loin cette étude de définir la valeur de $Pr_t = A_\theta/A$. Il apparaît que selon les auteurs on trouve des valeurs de $Pr_t \approx 0,7$ (Landau et Lifchitz /69/) , de 0,8 (Brundett /70/, D.B. Johnson /68/ ou 0,9 Taccon /13/).

Enfin nous avons montré que dans le cas d'un léger gradient de pression, la condition de raccordement $U_1/U_m = Cte$ pouvait être conservée. On tire alors des formules (108) :

$$T_p - T_e = \frac{\phi}{\rho C_p u_f} \left[Pr_t \frac{U_m}{u_f} - B Pr_t + B_\theta \right] \quad 114$$

Dans une zone où u_f est constant, $T_o - T_e$ est proportionnel à U_m , donc croît d'une façon sensiblement linéaire ; ce que l'on constate bien. Toutefois, les incertitudes de la détermination de la pente ne permettent pas de déterminer une valeur significative de Pr_t .

C O N C L U S I O N

Au cours de ce travail nous avons étudié un écoulement d'air à faible turbulence initiale le long d'un canal de section rectangulaire. Nous avons précisé de quelle manière les couches limites turbulentes créées à l'amont se développaient, puis se déformaient dans une zone dite de mélange avant de tendre vers le régime établi.

Cette étude de l'écoulement considéré dans son ensemble fait apparaître des propriétés nouvelles de la zone de couche limite qui nous semble permettre l'amorce d'une solution de la déformation de l'écoulement dans la zone de mélange.

Lors de l'étude expérimentale nous avons constaté qu'on ne pouvait pas considérer le régime établi comme proche de la section de jonction des couches limites. La zone de mélange qui la suit a une longueur peu différente de celle de la couche limite soit environ 35 fois la hauteur du canal. Au-delà on remarque toujours une légère évolution du champ de vitesses aux distances usuellement indiquées dans la bibliographie comme permettant d'obtenir le régime établi. Il serait préférable de dire que le champ de

vitesse est alors suffisamment proche d'un champ asymptotique appelé régime établi pour pouvoir lui être assimilé dans la pratique.

Au cours de ce travail nous nous sommes particulièrement attachés à éviter l'emploi des dispositifs correcteurs utilisés classiquement à l'entrée même du canal (grilles, nids d'abeilles) qui régularisent l'arrivée de l'air, mais perturbent le développement des couches limites comme nous avons pu le vérifier. Nous avons alors constaté que la symétrie de l'écoulement près du régime établi souvent présentée comme "naturelle" dépend directement de la symétrie de l'écoulement à l'amont du canal et de la géométrie du collecteur d'air (un modèle à profil en $\sqrt{\quad}$ apparaissant préférable aux profils elliptiques). Ainsi, bien qu'un régime établi puisse être indépendant de la distance à l'entrée du canal, sa forme dépend des conditions de création des couches limites et l'hypothèse de symétrie correspond au cas le plus simple à envisager mais le plus difficile à obtenir expérimentalement. Dans l'hypothèse inverse, au champ de vitesse établi dissymétrique (que permettent bien les équations de Navier) correspond une dissymétrie du frottement pariétal .

On constate alors que la réorganisation de l'écoulement dans la zone de mélange ne s'effectue pas régulièrement comme dans le cas où les couches limites sont symétriques. En effet dans les zones de sillage la distance à la paroi d'une isovitesse réduite $U/U_m = Cte$ passe par une succession de maxima et de minima, l'amplitude de l'évolution étant de plus en plus faible.

Enfin, en écoulement symétrique, pour un nombre de Reynolds d'entrée donné, le frottement pariétal évolue faiblement en couche limite turbulente au-delà des premiers diamètres du canal. Par contre, contrairement à ce qui est admis, nous avons trouvé que ce frottement croissait d'environ 8 % dans la zone de mélange.

De plus nous avons constaté que dans notre veine d'expérience de rapport $L/D = 10$ il apparaît impossible d'éviter des effets de tridimensionnalité, tout particulièrement dans la zone de mélange. Les couches limites qui se sont développées le long des faces latérales du canal sont

alors brutalement écrasées, entraînant l'existence d'un flux de masse vers ces petites faces. Il n'est pas certain qu'une augmentation raisonnable du rapport ℓ/D soit suffisante pour rendre ce phénomène négligeable.

Les lois classiques représentant le champ turbulent des vitesses ont été confrontées avec l'expérience pour des nombres de Reynolds de plus en plus faibles (86 000 à 11 000).

Nous avons montré l'existence d'une loi de paroi $U^+ = f(y^+)$ valable tout au long du canal. Cette loi dépend légèrement de Re et nous avons pu expliquer ces écarts en tenant compte de la variation du frottement $\tau(y)$ dans cette zone pariétale dont l'épaisseur ne peut plus être négligée aux faibles Reynolds.

Par contre les lois déficitaires de couche limite et de régime établi ne peuvent être reliées simplement l'une à l'autre. Nous avons donc été conduits à réétudier d'une manière plus approfondie leur comportement.

En couche limite, la loi déficitaire dont on sait qu'elle est une forme asymptotique apparaît très approximative aux plus basses valeurs de Re étudiées.

Analysant par ailleurs un résultat expérimental proposé par Mouton : le champ des vitesses $U/U_m = Cte$ forme un faisceau de droites dans le plan (x,y) , nous avons rattaché cette représentation à la loi déficitaire quand Re est assez grand et u_τ évolue peu. Pour des Re décroissants nous avons trouvé que l'origine du faisceau s'élevait au-dessus de la plaque alors que la longueur du domaine de validité de cette représentation diminuait puis disparaissait. Cette remarque nous a conduits à regrouper l'ensemble de nos résultats dans la zone de sillage d'une couche limite par une loi :

$$\frac{U}{U_m} = f \left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0} \right]$$

y_0 étant l'épaisseur de la zone pariétale.

Par ailleurs cette loi s'applique sans modification aux résultats expérimentaux obtenus par d'autres auteurs /21/ /35/ /50/ le long d'une plaque plane sans gradient de pression si l'on prend pour y_0 l'ordonnée de l'isovitesse $U_1/U_m = 0,7$.

Nous avons alors rapproché un modèle proposé par Hirsch de cette description expérimentale d'une couche limite séparé en deux domaines superposés ayant une frontière définie par l'isovitesse $U_1/U_m = \text{Cte}$, par opposition au schéma classique qui suppose une zone de recouvrement indéterminée des lois de paroi et de sillage. Une étude critique de ce modèle confirme le résultat suivant :

. dans les zones extérieures d'une couche limite, les gradients transversaux deviennent très faibles et les simplifications des équations de Navier conduisant à la forme de Blasius doivent être réexaminées. Les nouvelles hypothèses conduisent à montrer l'existence d'une loi unique de vitesse de la forme :

$$\frac{U - U_1'}{U_m - U_1'} = g \left[\frac{y - \epsilon}{\delta - \epsilon} \right] \quad \text{avec } U(y=\epsilon) = U_1'$$

Nous avons retrouvé cette forme de solution à partir d'hypothèses proposées par Townsend, ce qui nous a permis de justifier l'emploi de la relation de fermeture introduite par Hirsch. Reprenant l'étude de la sous-couche, nous avons précisé la condition de raccordement avec la zone extérieure en levant une incompatibilité qui apparaissait dans le travail original. Nous avons enfin montré que la valeur de la vitesse frontière U_1' du modèle était telle que :

$$U_m^2 - U_1'^2 = \text{Cte}$$

reliant ainsi le résultat expérimental au modèle en identifiant U_1' à U_1 et ϵ à y_0 si U_m est pratiquement constant.

On peut alors associer à cette vitesse U_1 en $y_0 = \epsilon$ une valeur de la corrélation $\overline{uv}$ telle que $(\overline{uv})'_y = 0$ en bon accord avec l'expérience. Cependant, dans le cadre des approximations faites cette loi extérieure de vitesse reste indépendante de la contrainte turbulente et par conséquent elle serait identique pour une couche limite turbulente et pour la couche limite laminaire correspondante qui la précède. L'expérience vérifie très bien ce résultat qui devrait également pouvoir être appliquée aux couches limites de fluides non newtoniens.

L'étude des conditions de raccordement de cette loi avec la partie logarithmique de la représentation pariétale nous conduit à proposer une loi de frottement liée à l'épaisseur ξ de la zone extérieure de couche limite

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \alpha \text{ Log } \left[\frac{\xi U_m}{\nu} \cdot \frac{C_f}{2} \right] + \beta$$

Cette loi de frottement le long d'une plaque plane n'est pas unique mais dépend légèrement par α , β , ξ des conditions initiales, c'est-à-dire de la manière dont est créée la transition laminaire-turbulent. Nous apportons ainsi un élément de réponse à une remarque de E.A. Brun et P. Vernotte (voir /34/ p. 464-465).

Nous en déduisons la loi d'évolution de l'épaisseur réduite de la sous-couche $y_0^+ = y_0 U_f / \nu$ qui est fonction croissante de Re , ce que l'on constate expérimentalement.

Enfin quand Re devient grand ξ/y_0 tend vers l'infini et l'on peut confondre $\xi U_m / \nu$ et Re_δ . La loi de frottement est alors compatible avec les lois asymptotiques logarithmiques et puissance employées classiquement.

Une étude thermique montre que dans les zones extérieures les lois d'évolution du champ thermique et dynamique sont confondues aux erreurs expérimentales près, soit :

$$\frac{T - T_1}{T_e - T_1} = \frac{U - U_1}{U_m - U_1} = g \left[\frac{y - y_0}{\delta - y_0} \right]$$

Nous en déduisons une loi d'évolution du nombre de Margoulis en fonction de Re sans introduire comme il est fait, dans le cadre de l'analogie de Reynolds, une valeur de l'épaisseur d'une sous-couche visqueuse. Quand Re devient assez grand cette loi est confondue avec la loi puissance classique.

Poursuivant maintenant l'étude dynamique le long du canal au-delà de la zone de couche limite nous montrons que les hypothèses employées précédemment s'appliquent également en zone de mélange et en régime établi. On en déduit que la nouvelle loi représentative du champ des vitesses est la même dans les zones de sillage de régime établi et de couche limite. En régime établi la zone de sillage correspond à la région où $(\overline{uv})'_y$ conserve une valeur constante. On en déduit que l'épaisseur de la zone pariétale est plus forte en régime établi qu'en couche limite. Ce résultat inédit, bien que qualitatif, est bien vérifié mais ne permet pas de calculer sans hypothèse supplémentaire (ou sans une meilleure connaissance des propriétés de la loi pariétale) l'augmentation du frottement dans la zone de mélange.

Enfin l'indépendance de la distance à l'entrée du canal conduit à une forme parabolique de la loi extérieure de vitesse, valable tout au long du canal

$$\text{soit} \quad \frac{U - U_1}{U_m - U_1} = 2\left(\frac{Y}{\xi}\right) - \left(\frac{Y}{\xi}\right)^2 \quad \text{où} \quad Y = y - y_0$$

$\xi = (D - y_0)$ en régime établi et ξ proportionnel à $\delta - y_0$ en couche limite pour laquelle nous sommes amenés à admettre l'hypothèse d'une frontière extérieure bien déterminée pour l'écoulement moyen.

L'expérience vérifie ce résultat avec une excellente approximation tout au long du canal.

En résumé, une étude de l'écoulement moyen tout au long d'un canal nous a amenés à étudier et développer un modèle d'écoulement tenant

compte de la petitesse des gradients transversaux de vitesse. L'association des propriétés tirées de ce modèle à celles des lois classiques de paroi nous a permis de prévoir le comportement de l'écoulement moyen tout au long du canal et de relier l'écoulement turbulent établi aux conditions de formation des couches limites à l'entrée du canal. De plus, nous avons précisé l'évolution des couches limites turbulentes le long d'une plaque plane sans, ou avec léger gradient de pression, quand le nombre de Reynolds devient suffisamment faible et que les lois asymptotiques classiques ne s'appliquent plus.

B I B L I O G R A P H I E

- /1/ NIKURADSE J.
VDI - Forschungsheft 281 (1926)
- /2/ EICHELBRENNER E.A., PRESTON J.H.
On the role of secondary flows in Turbulent Boundary Layers in corners
J^{al} de Mécanique, Vol. 10, n° 1, p. 91-112 (Mars 1971)
- /3/ COMTE-BELLOT G.
Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles
P.S.T. 419 - Paris (1965)
- /4/ HINZE J.O.
Turbulence Mc Graw Hill (1959)
- /5/ YOUNG-MASS
The behaviour of a Pitot Tube in Transverse Pressure Gradient
Reports and Memoranda n° 1770 - Cambridge (9th September 1936)

- /6/ PRESTON J.H.
The determination of turbulent Skin Friction by Mean of Pitot Tubes
J^{al} of Royal Aeronautical Society, Vol. 58, p. 109-121 (Feb. 1954)
- /7/ BARAT M.
Difficultés relatives aux déterminations des champs de pression
et de vitesse dans les écoulements turbulents
Industries thermique et Aéraulique (Juillet 1966)
- /8/ COLES D.E., HIRST E.A.
Computation of Turbulent Boundary Layers
AFOSR-IFP - Standford Conference (1968)
- /9/ VAN TINH N.
C.R. Acad. Sc. Paris , t. 264, p. 1150-1152 (19 juin 1967)
DISA Informations n° 7 (January 1969)
- /10/ LE STUM M., NIZOU P.Y.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, A, p. 687-690 (11 octobre 1971)
- /11/ COANTIC M.
Note Technique PST 113 - Paris (1962)
- /12/ BARBIN A.R., JONES J.B.
Turbulent Flow in the Inlet Region of a Smooth Pipe
Trans. ASME p. 29-34 (March 1963)
- /13/ TACCOEN L.
Thèse - Faculté des Sciences - Paris (1966)
- /14/ COANTIC M.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 264, A, p. 826 (1967)
- /15/ BURGAUD G.
Rapport D.E.A. Département Echanges Thermiques, Nantes (1968)

/16/ FOURCHER B.

Communication personnelle, Département d'Echanges Thermiques,
Nantes (1972)

/17/ ALCARAZ

Communication personnelle, Mécanique des Fluides, Ecole Centrale
de Lyon (1970)

/18/ GESSNER F.B., JONES J.B.

On Some Aspects of Fully Developed Turbulent Flows in Rectangular
Channels
Jal Fluid Mech. , Vol. 23, part. 4, p. 689-713 (1965)

/19/ DEISSLER R.G.

NACA TN 2138 (1950)

/20/ DEISSLER R.G.

NACA TN 3016 (1953)

/21/ KLEBANNOF P.S. DIEHL

NACA Report 1110 (1950)

/22/ SCHULTZ - GRUNOW F.

NACA TM 986

/23/ MATHIEU J.

Ecoulements pariétaux

Jal Mécanique, Vol. 8, n° 1, (1969)

/24/ FORTIER A.

Théorie Asymptotique de la couche limite turbulente
Herceg-Noví (Yougoslavie) (1968)

/25/ MILLIKAN C.B.

A critical discussion of Turbulent Flows in Channels and Circular Tubes

5th Intal Congress of Appl. Mech. Cambridge p. 386-392 (1938)

/26/ CLAUSER F.H.

The Turbulent Boundary Layer

Adv. in Appl. Mech., 4, 1, (1956)

/27/ HEGGE-ZIJNEN B.G.

Verhaudel Koninkl. Akad. Weten Shap.

Amsterdam Af deel. Natuurk 31 : 499 (1928)

/28/ BURGERS J.M.

Proc. Intern. Congr. Appl. Mech., 1st Congr. DELFT, p. 113 (1924)

/29/ NIKURADSE J.

Untersuchungen über Geschwindigkeitsverteilung in Turbulenten Strömungen

Diss. Göttingen (1926) ; VDI Forschungsheft 281 (1926)

/30/ BRUN E.A.

Introduction à l'Etude de la Couche Limite

Gauthier Villars (1955)

/31/ MOUTON H.

Thèse, Poitiers (1962)

/32/ VAN DRIEST E.R.

On Turbulent Flow near a wall

Jal Aer. Sciences p. 1007-1011 (1956)

/33/ COANTIC M.

C.R. Acad. Sc. Paris, T. 264, A, p. 849 (17 mai 1967)

/34/ HINZE J.O.

Turbulent Pipe Flow,

Mécanique de la Turbulence - Marseille, C.N.R.S. (1962)

/35/ WIEGHARD

Computation of Turbulent Boundary Layers

AFOSR-IFP - Stanford Conference (1968)

/36/ SCHUBAUER G.B., KLEBANNOF P.S.

NACA TN 2133 (1950)

/37/ COLES D.

The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer

J. Fluid. Mech. 1, p.191-226

/38/ BELL

Computation of Turbulent Boundary Layers

AFOSR-IFP - Stanford Conference (1968)

/39/ ROTTA J.C.

Incompressible Turbulent Boundary Layers

Mécanique de la Turbulence - Marseille, C.N.R.S. (1962)

/40/ SCHLICHTING H.

Boundary Layer Theory

Mc Graw Hill (1968)

/41/ SCHUBAUER G.B.

Turbulent Processes as observed in Boundary Layer and Pipe

Jal Appl. Physics, Vol. 25, n° 2 (February 1954)

/42/ KLEBANNOF P.S.

NACA Report 1247 (1953) NACA TN 3178 (1954)

/43/ CORRSIN S., KISTLER A.L.
NACA 3133 (1953)

/44/ SUNYACH M.
Contribution à l'Etude des Frontières d'Ecoulements Turbulents Libres
Thèse 37 - (28 mai 1971) Université Claude Bernard - Lyon

/45/ HIRSCH R.
La Couche Limite Turbulente sur une Plaque Plane
PST n° 393 (1963)

/46/ HIRSCH R.
La Couche Limite Turbulente d'une Plaque Plane et les Equations
de Navier Stokes
Jal Mécanique, 8, p. 57-95 (1969)

/47/ HIRSCH R.
La Couche Limite Turbulente d'une Plaque Plane et les Equations
de Navier-Stokes
Communication personnelle (Mai 1967)

/48/ DOUCHEZ M.
Etude des Transferts en Mécanique des Fluides Monophasiques
t. I, II Masson (1965)

/49/ LAZAREFF - MESNIERE
Propriétés Cinématiques Moyennes de la Couche Limite Turbulente.
Examen critique de la théorie de R. Hirsch
Discussion des équations de base
Aérospatiale . Dir^{on} des Etudes Avions de Paris
N. ARA/NT/ 34/70 (Août 1970)

/50/ NIKURADSE J.
Laminare Reibungsschichten au der längsaugetrñters Platte
Monograph Zentrale f. wiss. Berichtswesen - Berlin (1972)

- /51/ MICHEL R., QUEMARD C. , DURANT R.
Computation of Turbulent Boundary Layers
AFOSR-IFP - Stanford Conference (1968)
- /52/ SCHUBAUER G.B., KLEBANNOF P.S.
NACA 3489 (1955)
- /53/ KNUDSEN-KATZ
Fluid Dynamics and Heat Transfer
Mc Graw-Hill (1958)
- /54/ SCHUBAUER G.B., SPANGENBERG W.B.
Forced Mixing in Boundary Layers
Jal Fluid Mech. 8, 10-32 (1958)
(voir /8/)
- /55/ LE STUM M.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, A, p. 1651-1654 (5 juin 1972)
- /56/ SCHULTZ - GRUNOW
NACA TM 986 (1941)
- /57/ MATHIEU J.
Remarks on Turbulent Flows with Free Stream Boundaries
Turbulent Jet Flows
Inst. Von Karman 26-30 (April 1971)
- /58/ KADOMSTEV B.B., KOSTOMAROV D.P.
Turbulent Layer in a Ideal Two bidimensionnal Fluid
The Physics of Fluids, Vol. 15, n° 1, p. 1-3 (January 1972)
- /59/ LAUFER
NACA TN 2123 (1950)

/60/ KESTIN J., RICHARDSON P.D.

Heat Transfer across Turbulent Incompressible Boundary Layers
Int. J^{al} Heat Mass. Transfer Vol. 6, p. 147-189 (1963)

/61/ BORD C.

Diffusivité Cinétique Turbulente dans des Tubes de Section
Circulaire
C.R. Acad. Sc. (France) t. 268, A, n° 9, p. 508-510 (3 mars 1969)

/62/ TOWNSEND

The Structure of Turbulent Shear Flows
Cambridge University Press (1956)

/63/ HANJALIC - LAUNDER

Fully Developed Asymmetric Flow in a Plane Channel
BL.TN/B/41 (January 1971)
Imperial College of Science and Technology
Exhibition Road - London S.W.7.

/64/ MATHIEU J.

P.S.T. n° 165 (1959)

/65/ TAILLAND

Jet Pariétal
J^{al} Mécanique, Vol. 6, n° 1 (1967)

/66/ NIZOU P.Y.

Contribution à l'Etude Aerothermique d'un Jet Pariétal Plan
Thèse 3° Cycle - Nantes (1971)

/67/ BORD C.

C.R. Acad. Sc. Paris , t. 268 A, n° 8, p. 470-472 (24 février 1969)

/68/ JOHNSON D.B.

Turbulent Heat Transfer in a Boundary Layer with Discontinuous
Wall Temperature

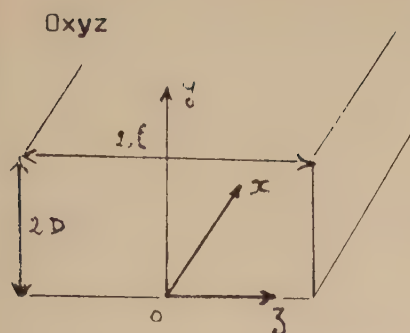
John Hopkins University (August 1955)

/69/ LANDAU-LIFCHITZ

Mécanique des Fluides M.I.R.

/70/ BRUNETT E., BURROUGH P.R.

Int^{al} J^{al} Heat and Mass Transfer
vol. 10, p. 1133-1142 (1967)



Trièdre trirectangle de référence.

O est sur l'intersection de la section droite d'entrée du canal et de l'axe de symétrie de la paroi inférieure du canal.

Ox : abscisse comptée le long de cet axe (distance à l'entrée du canal).

Oy : ordonnée comptée vers le haut perpendiculairement à la paroi inférieure (distance à la paroi inférieure).

l	demi-largeur du canal
D	demi-hauteur du canal
L	longueur du canal : $L = 4 \text{ m}$
$P_s(x)$	pression statique
$P_t(x,y)$	pression totale
$P_d(x,y)$	pression dynamique $P_d = P_t - P_s$
ρ, μ	respectivement : masse volumique et viscosité du fluide
ν	viscosité cinématique du fluide $\nu = \mu/\rho$
$u(x,y), V(x,y), W(x,y)$	composantes moyennes de la vitesse au point (x,y) selon Ox, Oy respectivement
u', v', w'	composantes correspondantes des fluctuations de vitesses
U_e	vitesse à l'entrée du canal $U_e = U(0,D)$
$U_m(x)$	vitesse le long de l'axe du canal $U_m(x) = U(x,D)$
δ	épaisseur de couche limite $U(x,\delta) = 0,99 U_m(x)$
Re	nombre de Reynolds $Re = \frac{U_e D}{\nu}$
Re_δ	$Re_\delta = \frac{U_e \delta}{\nu}$
τ_p	frottement pariétal
u_f	$u_f = \sqrt{\tau_p/\rho}$ vitesse de frottement
U^+	$U^+ = U/u_f$
y^+	$y^+ = y u_f/\nu$
C_f	$C_f = \tau_p / \frac{\rho U_e^2}{2}$ coefficient de frottement

C_{f_m}	$C_{f_m} = \tau_p / \frac{\rho U_m^2}{2}$
δ_1, δ_2	respectivement, épaisseur de déplacement, de quantité de mouvement
γ	coefficient d'intermittence
$()'_x$	dérivée par rapport à x (resp. y....)
y_0	épaisseur de la sous-couche pariétale
ξ	$\xi = \delta - y_0$ épaisseur de la couche limite proprement dite (C.L.P.D.)
$U_1(x)$	$U_1(x) = U(x, y_0)$
$\overline{()}$	valeur moyenne
S	coefficient de dissymétrie
T	coefficient d'aplatissement
Δ	frontière extérieure de la couche limite dynamique
ϕ	densité de flux de chaleur pariétal
T_e	température du fluide à l'entrée du canal
$T_p(x)$	température de paroi
Pr	nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$
C_p	capacité calorifique de l'air
m	nombre de Margoulis $m = \frac{\phi}{\rho C_p (T_p - T_e) U_e}$
α	coefficient pariétal d'échange $\alpha = \frac{\phi}{T_p - T_e}$
T^+	$T^+ = \frac{\rho C_p u_f T}{\phi}$

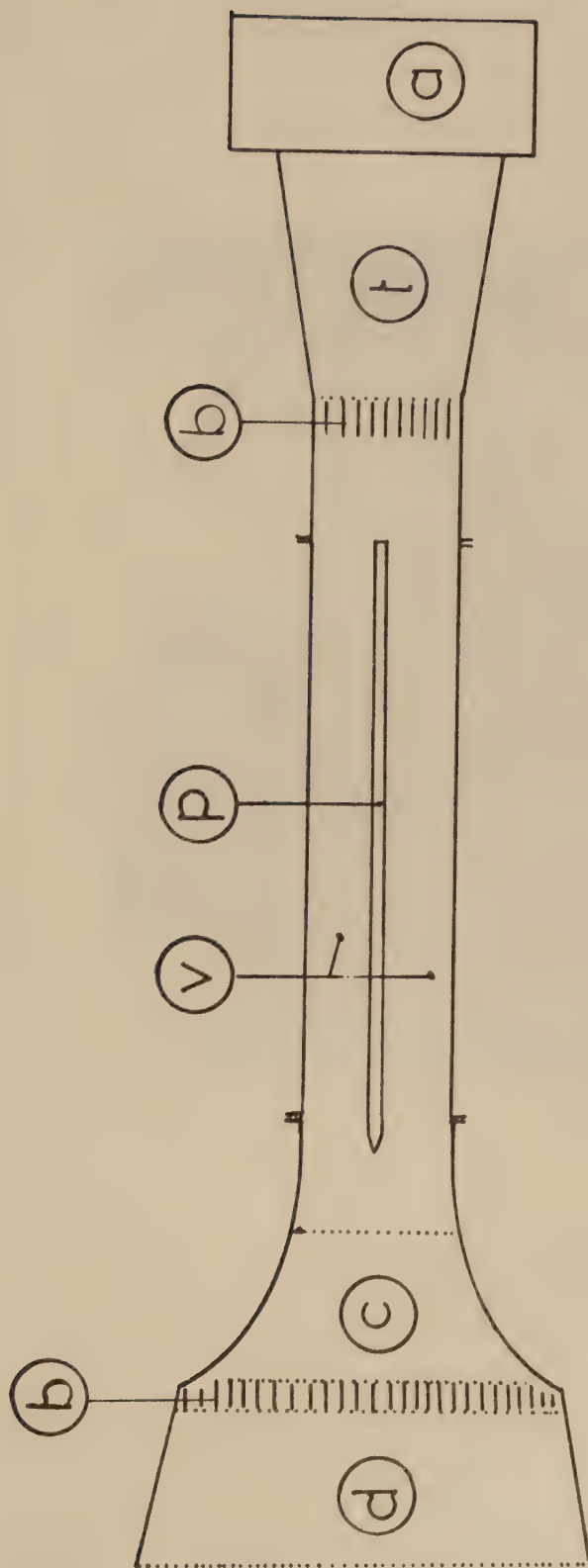


Figure 1 : Schéma du dispositif expérimental

(a) Ventilateur ; (b) Nids d'abeilles ; (c) Collecteur ; (d) Caisson d'aspiration

(p) Modèle chauffant (retiré pour l'étude dynamique) ; (v) Veine d'étude dynamique ; (t) Caisson de raccordement

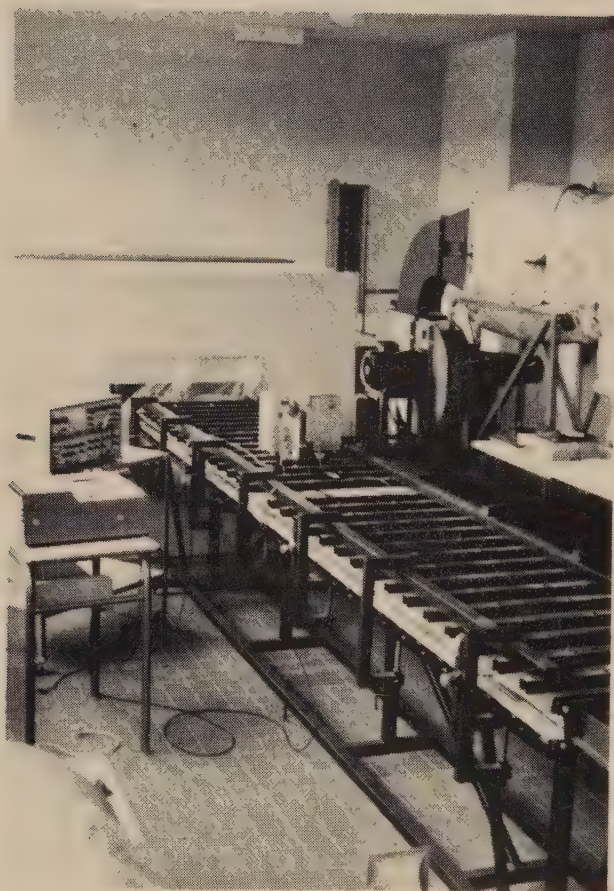


Figure 2 : Vue du dispositif expérimental.

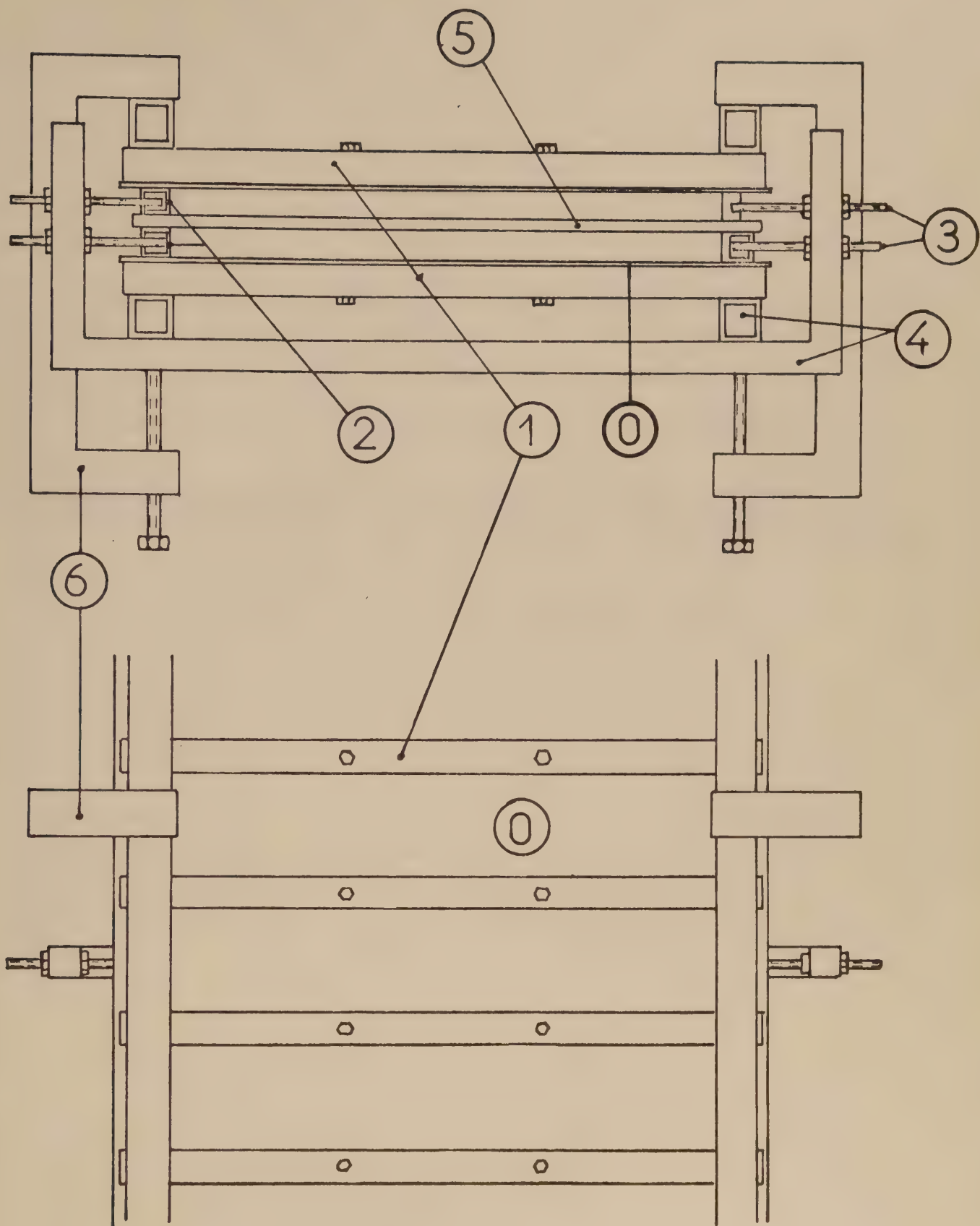


Figure 3 : Veine d'expérience

Coupe et Vue de dessus

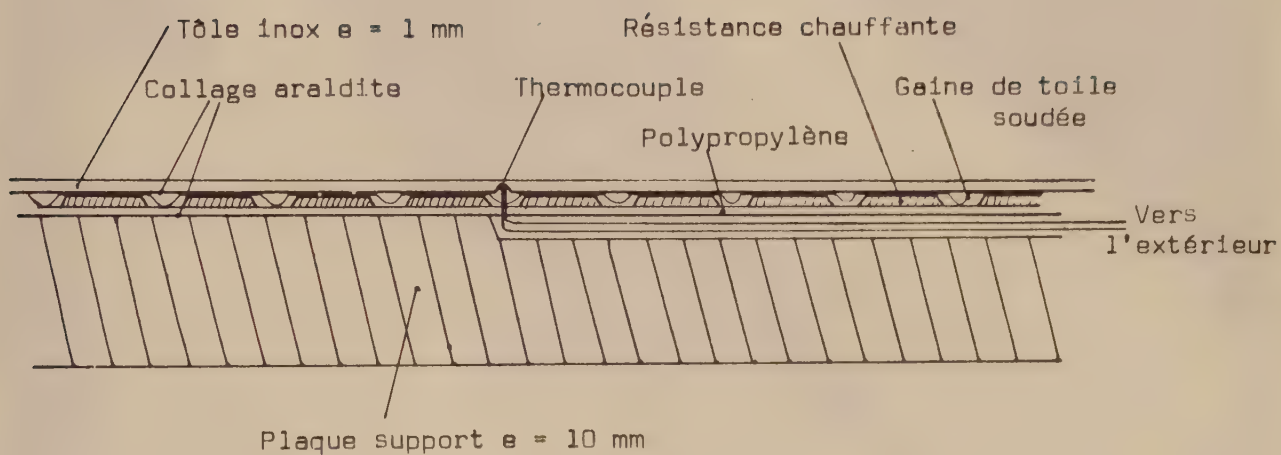


Figure 4
Schéma en coupe du montage thermique

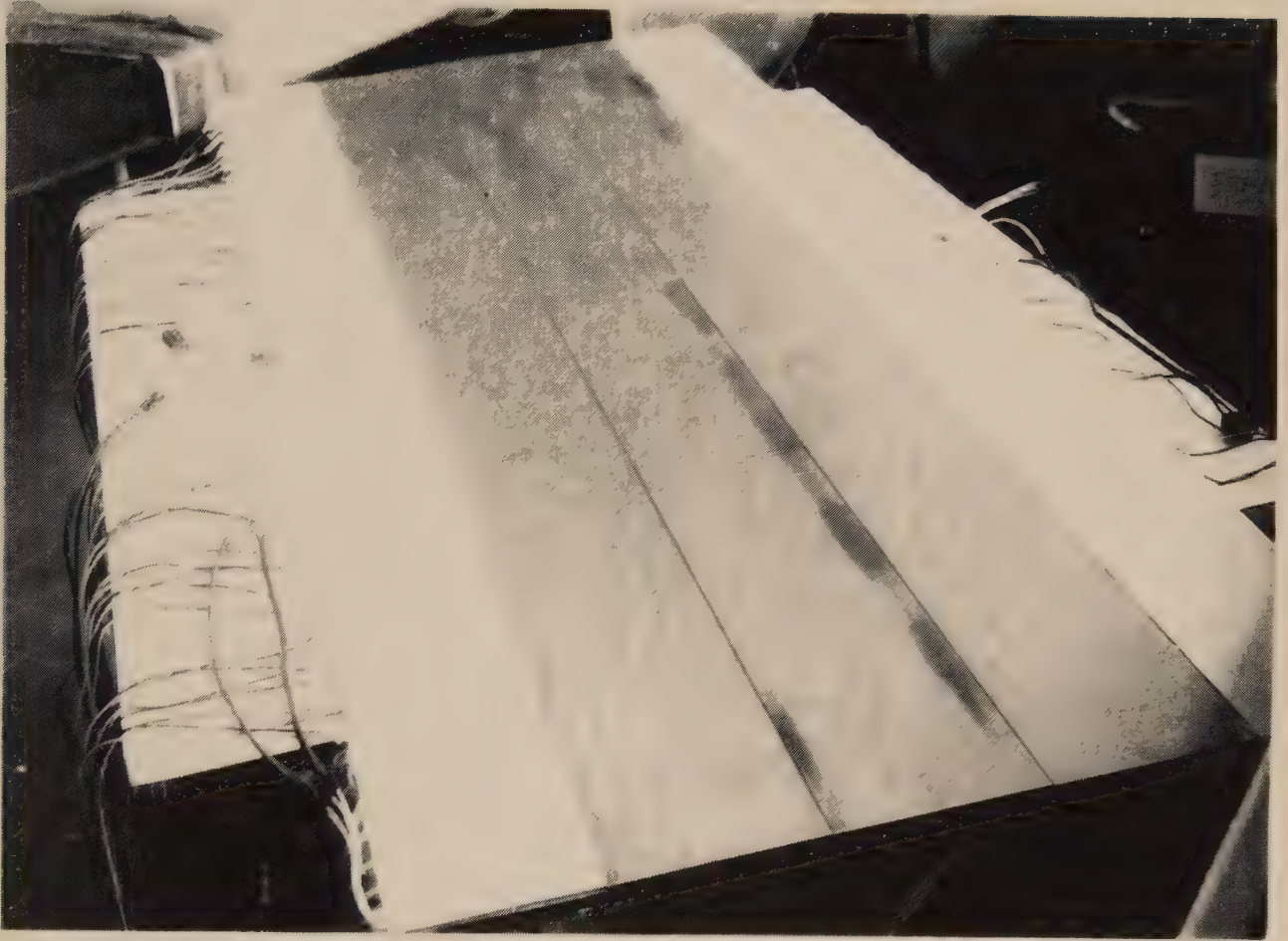


Figure 5 : Modèle chauffant



Figure 7 : Exemples d'enregistrements de champs de vitesse avant et après mise au point de la géométrie d'entrée

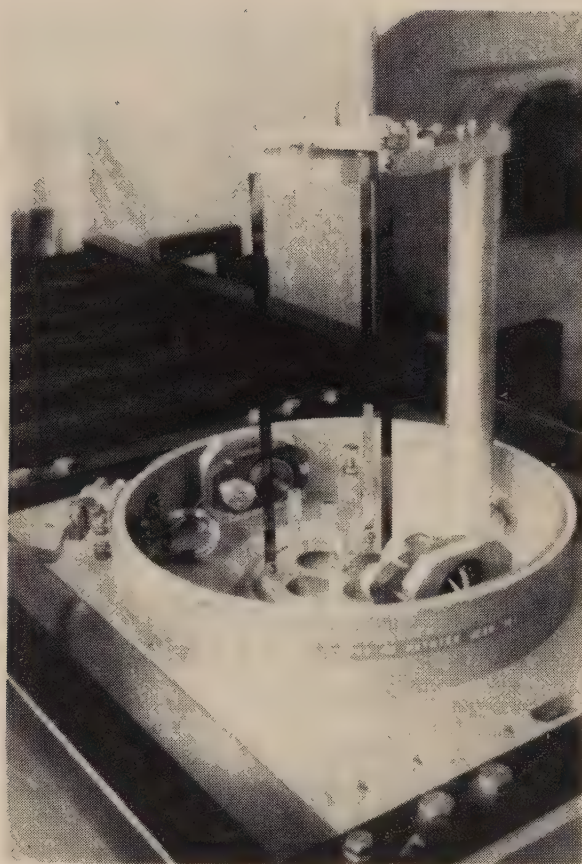


Figure 8 : Balance de paroi

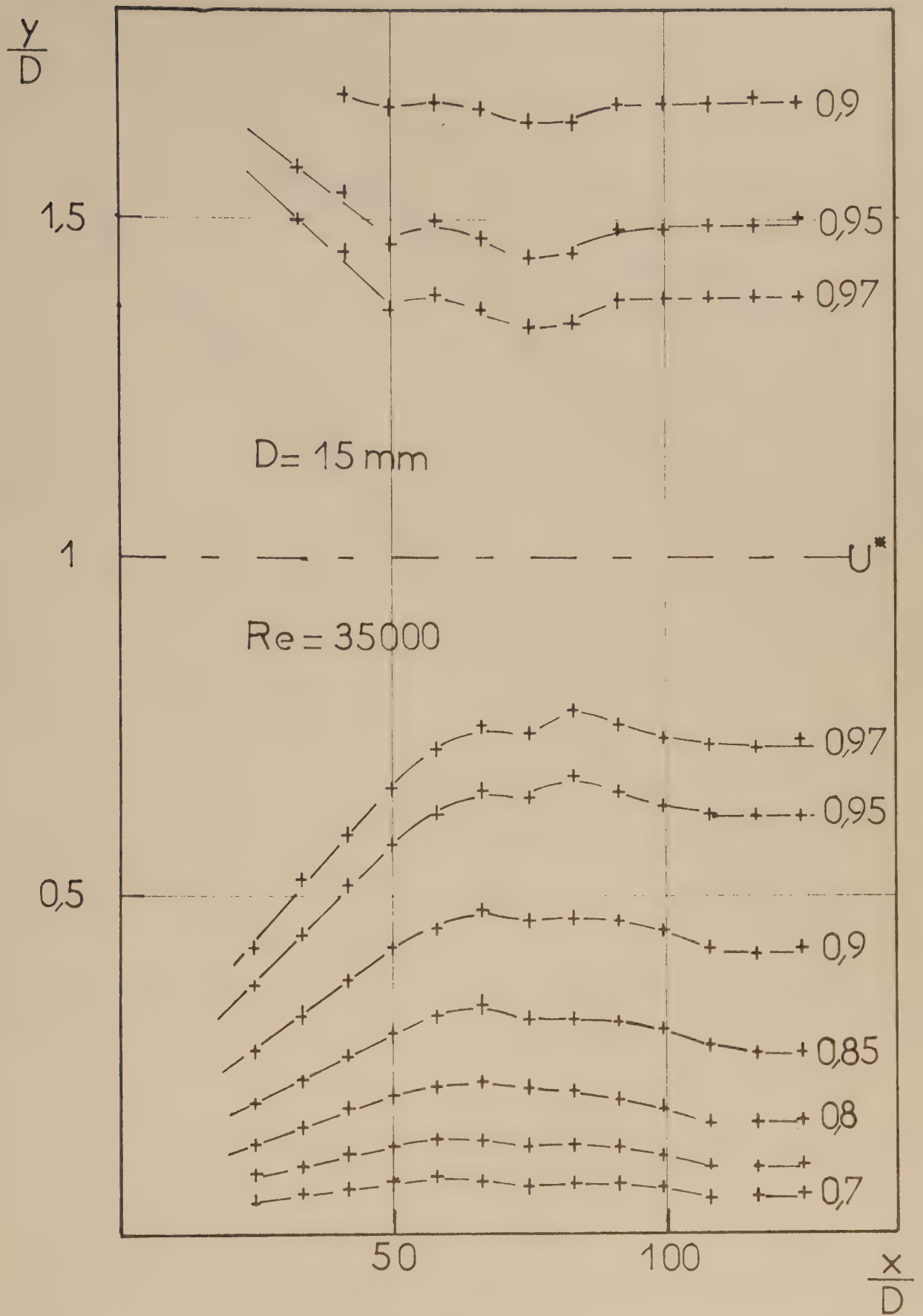


Figure 9 : "Isovitesses réduites" pour un écoulement dissymétrique

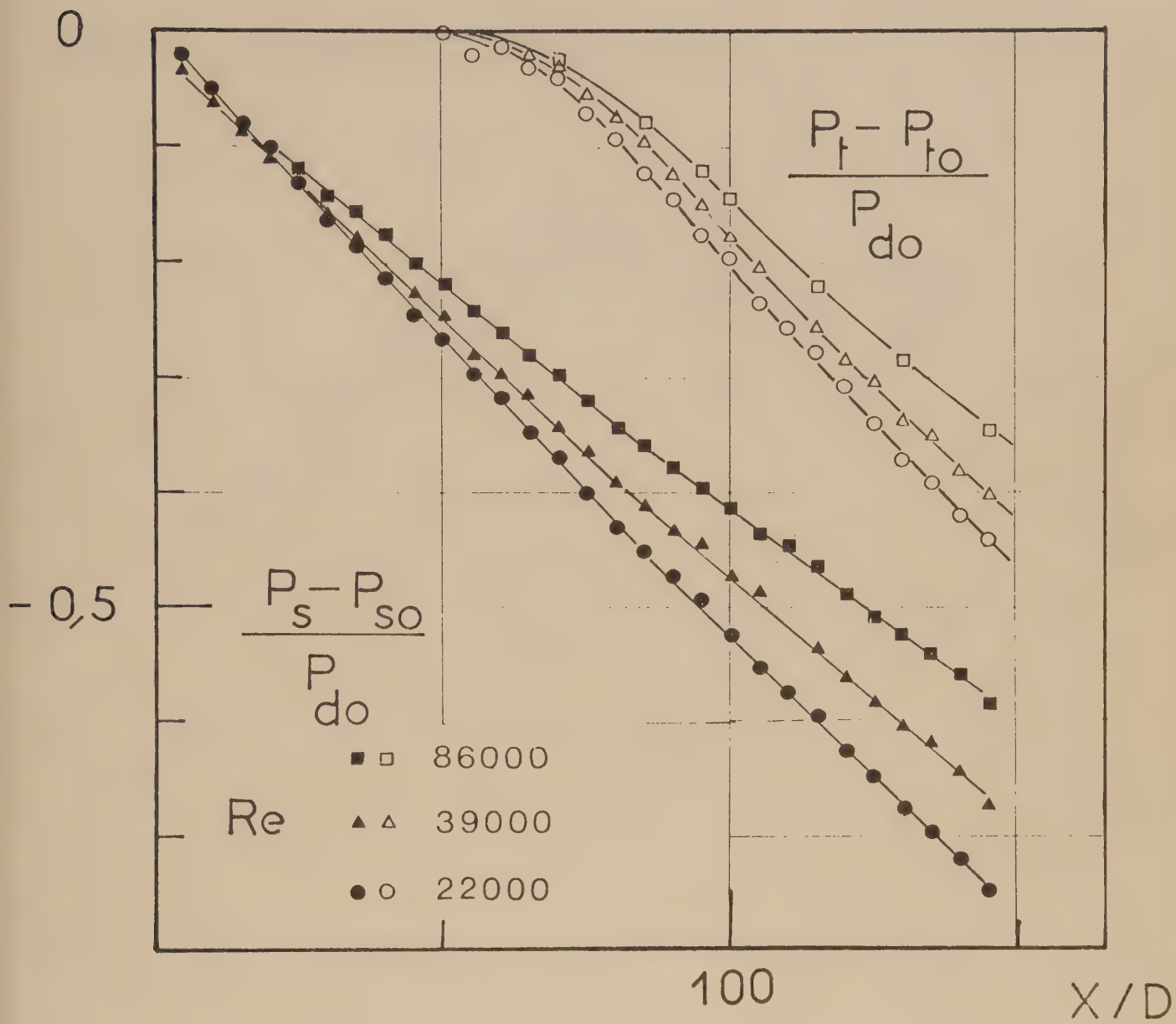


Figure 10 : Evolution des pressions totales et statiques le long du canal

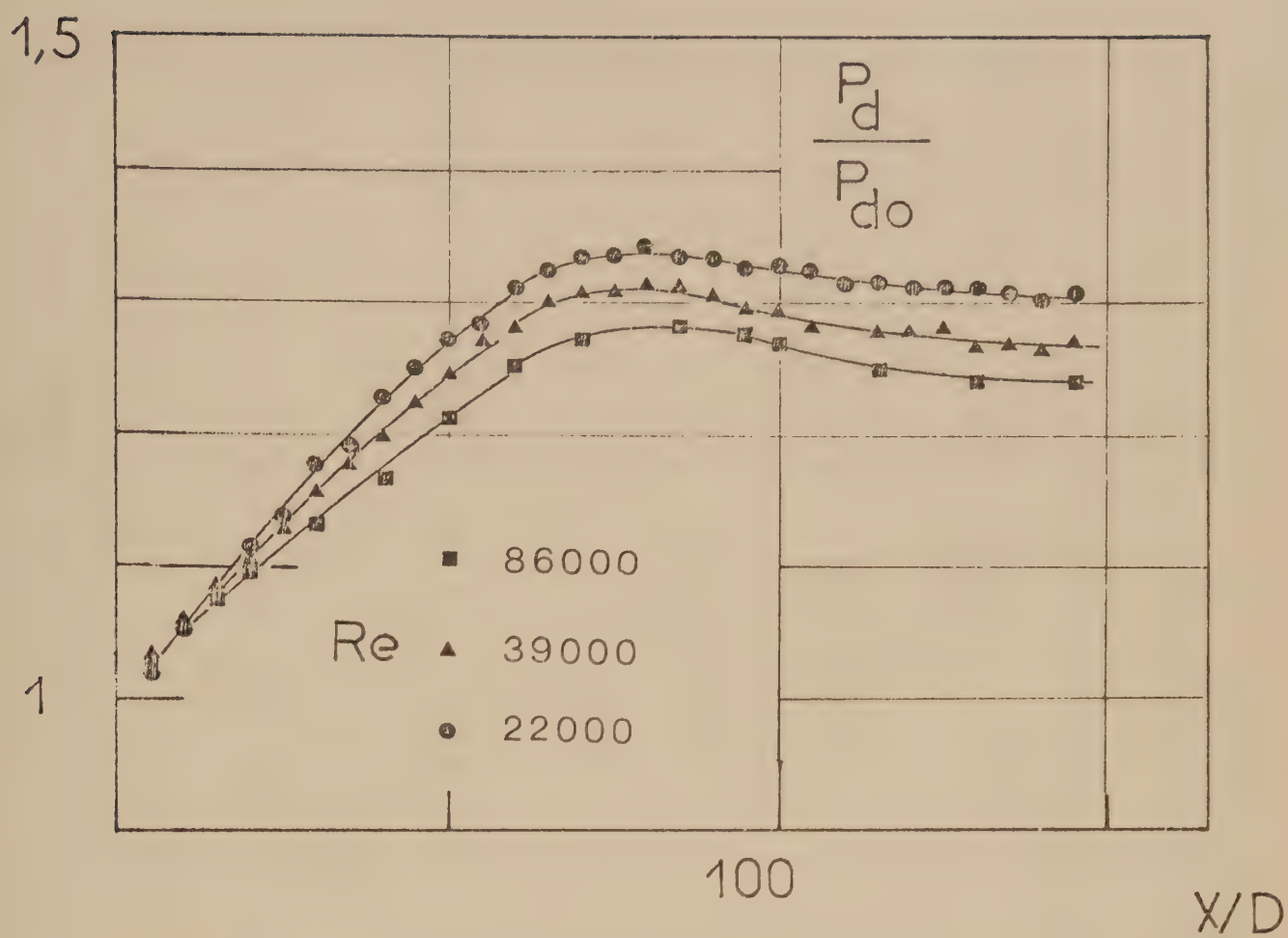


Figure 11 : Pressions dynamiques le long du canal

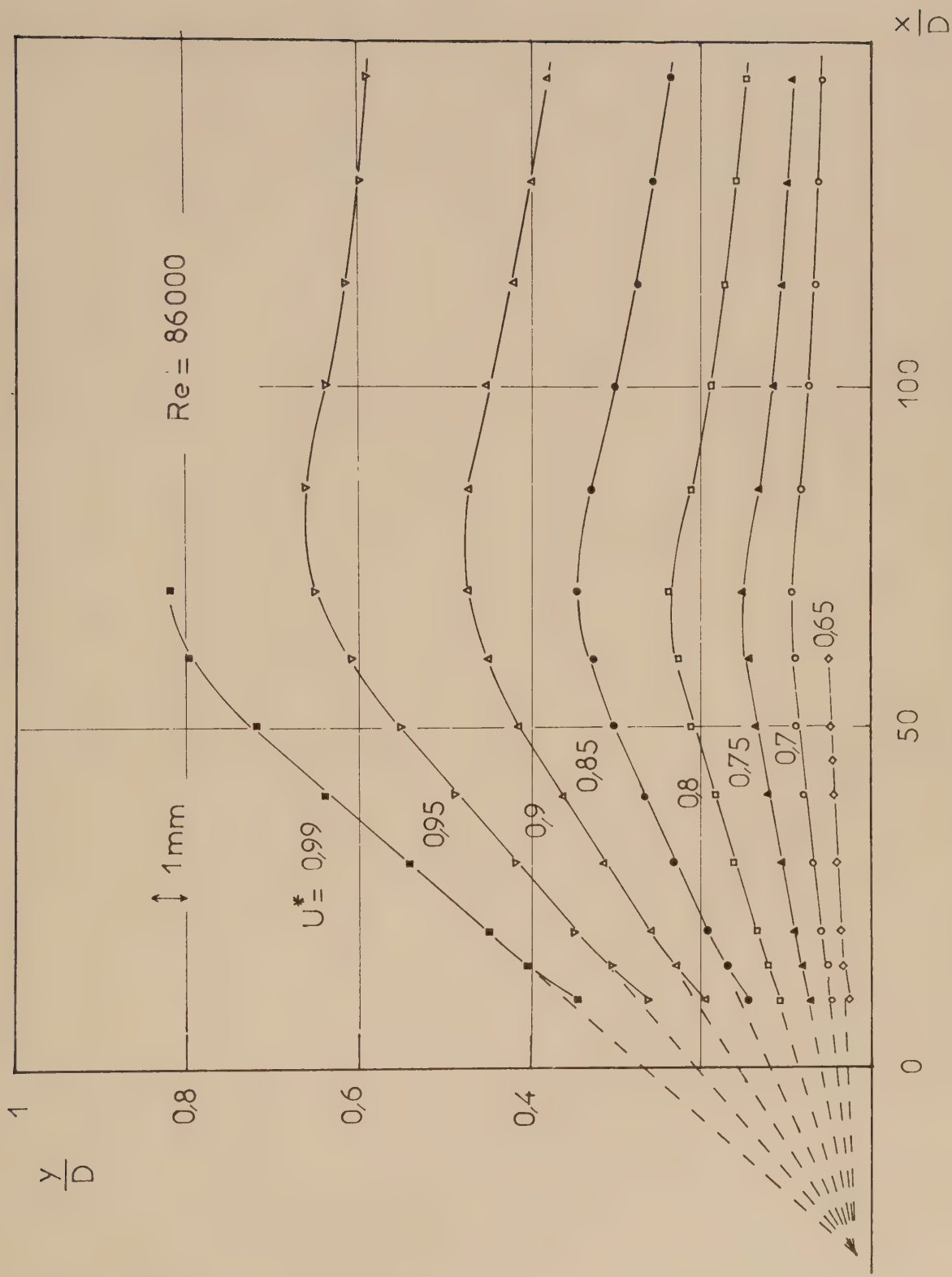


Figure 12 : Isovites réduites le long du canal

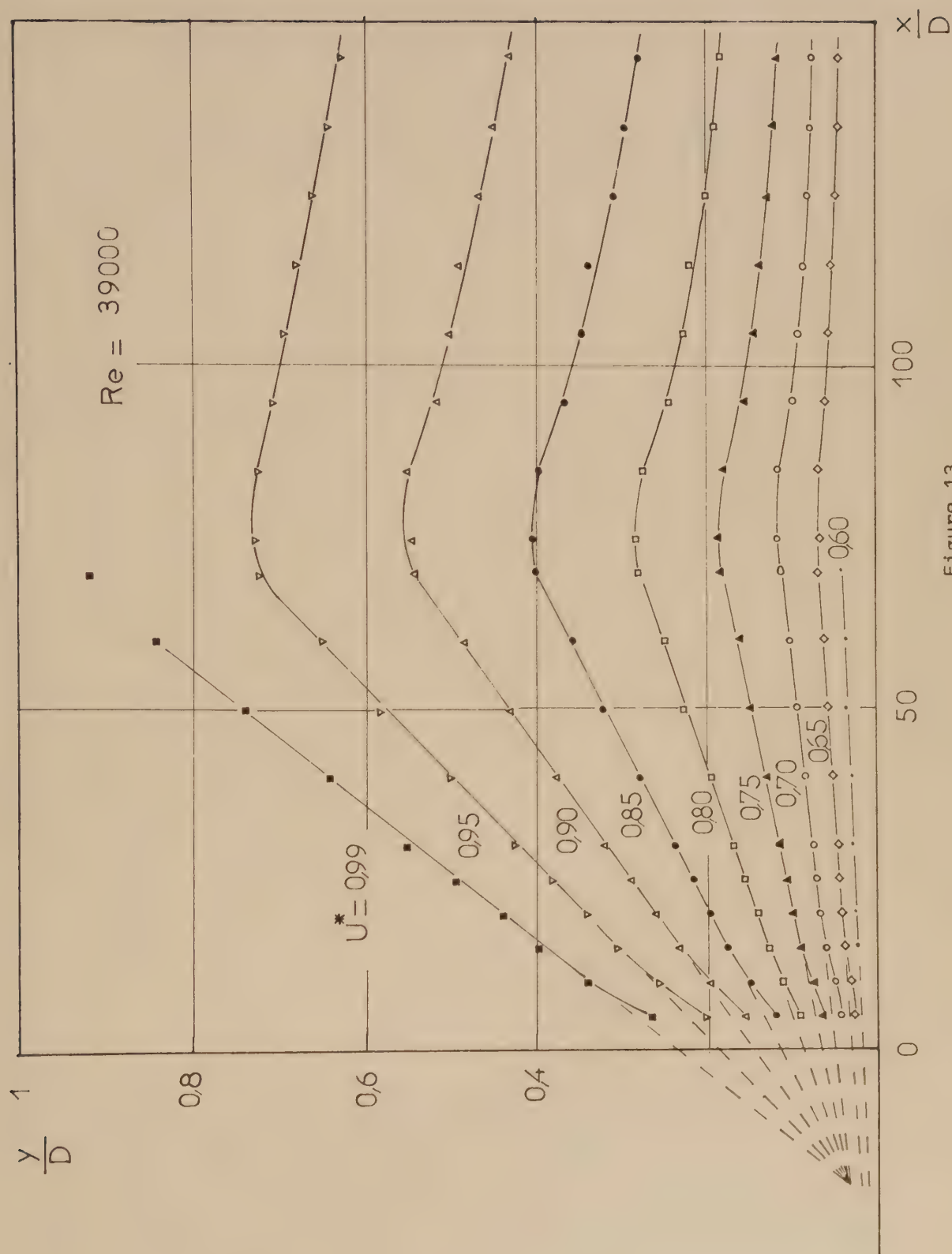


Figure 13

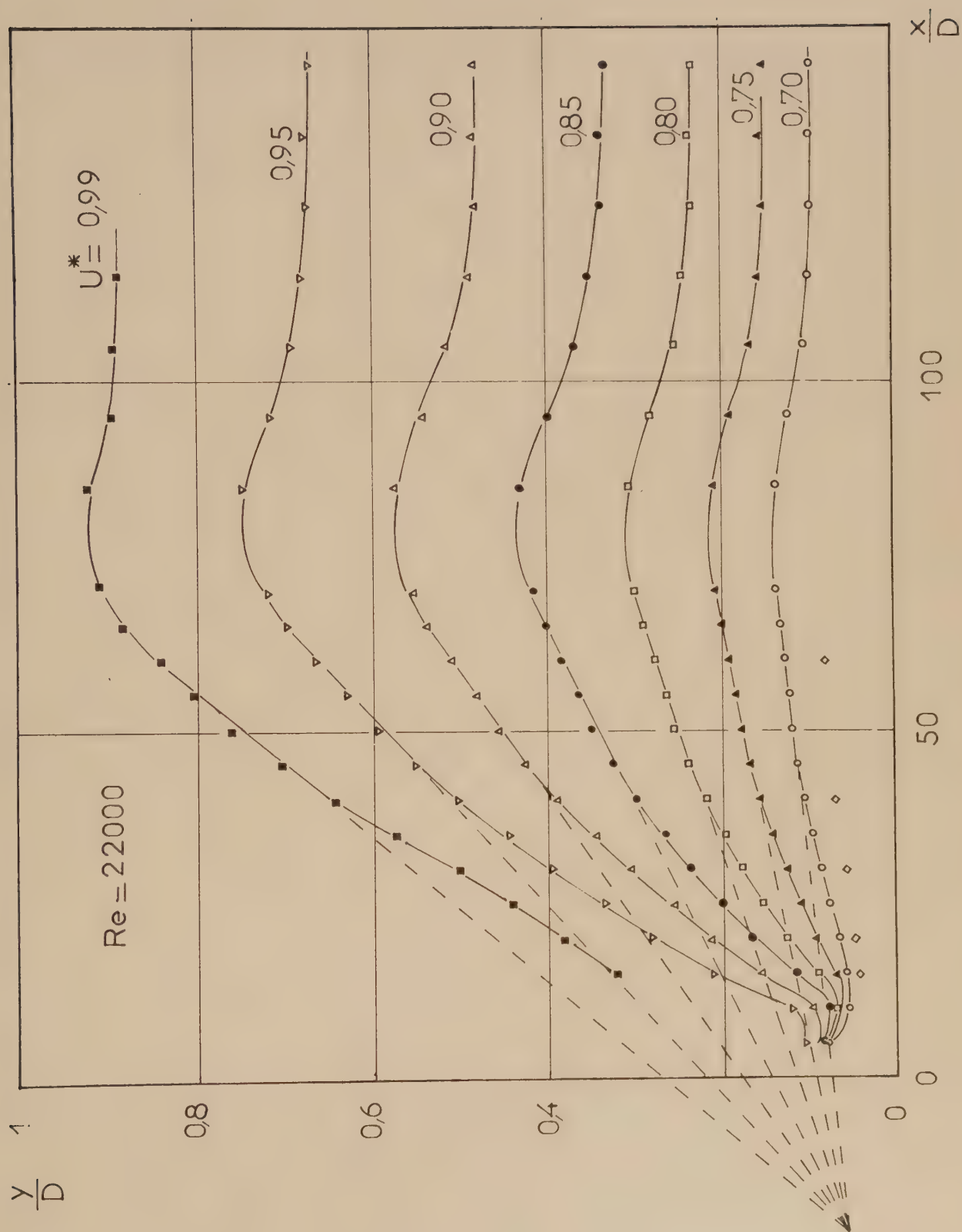


Figure 14

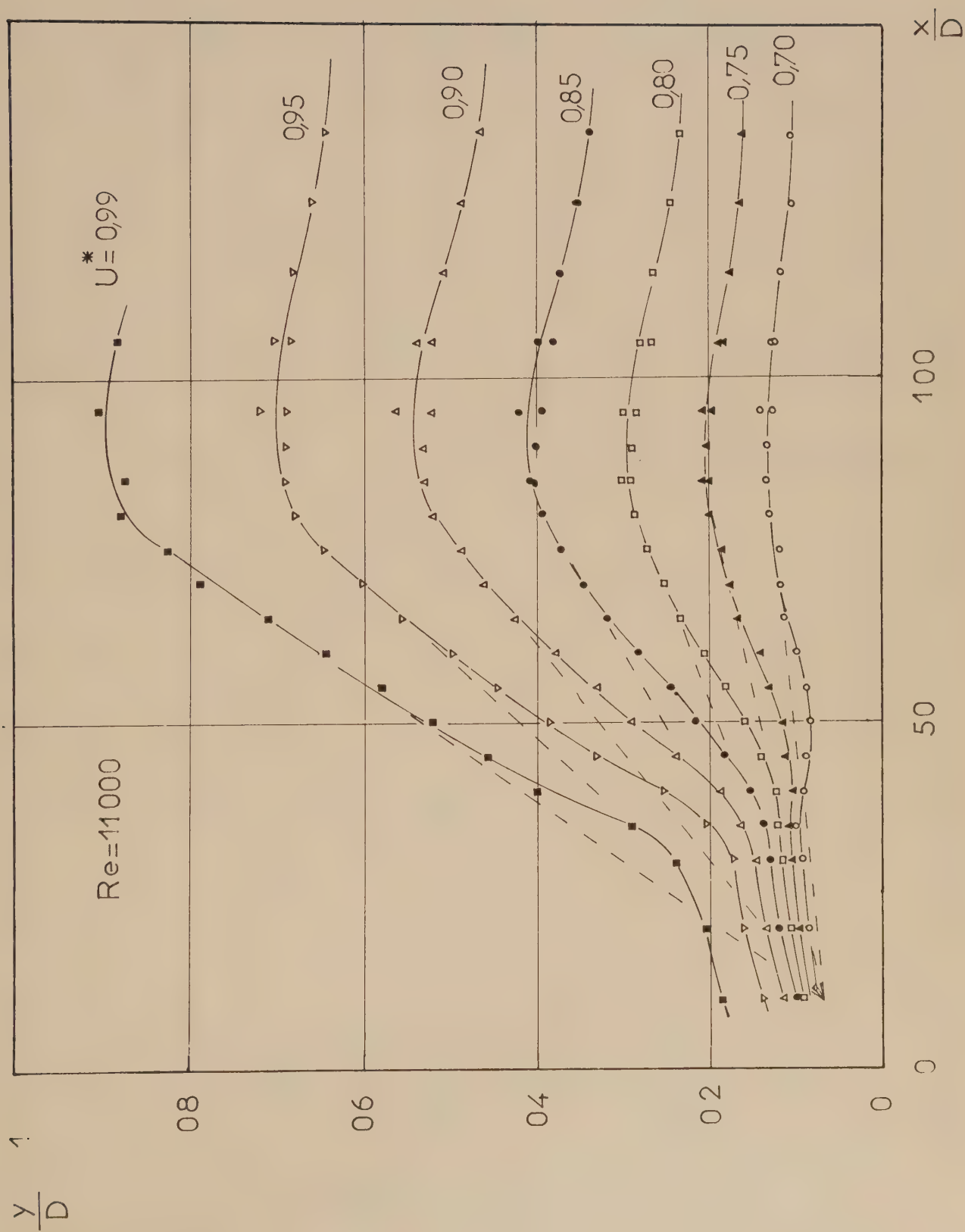


Figure 15

$$\frac{U_m}{U_e}, \frac{U_t}{U_e}$$

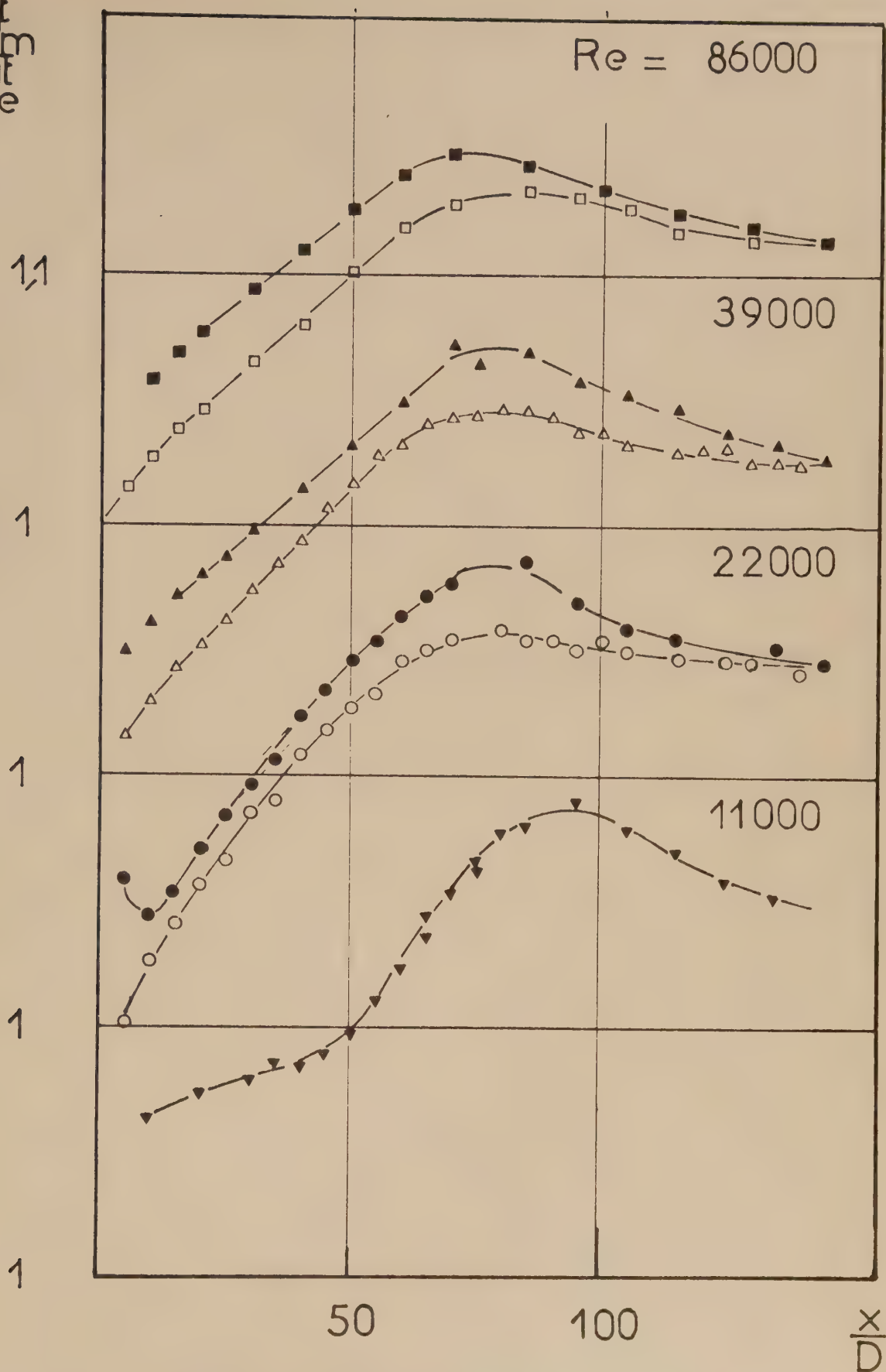


Figure 16 : Vitesses maximales le long du canal

Résultats bruts et avec correction de débit

(Points blancs)

(Points noirs)

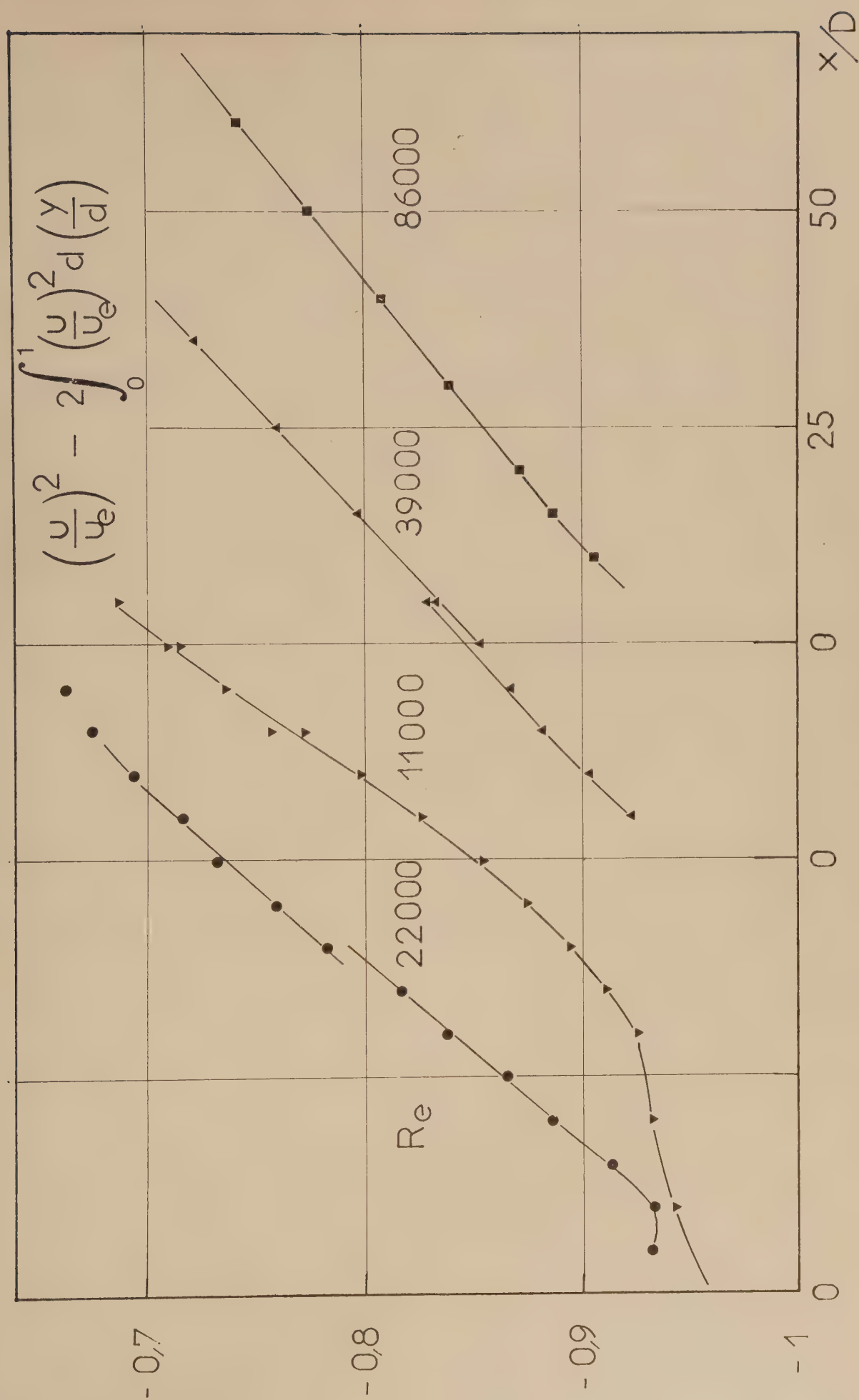


Figure 17 : Bilan de quantité de mouvement

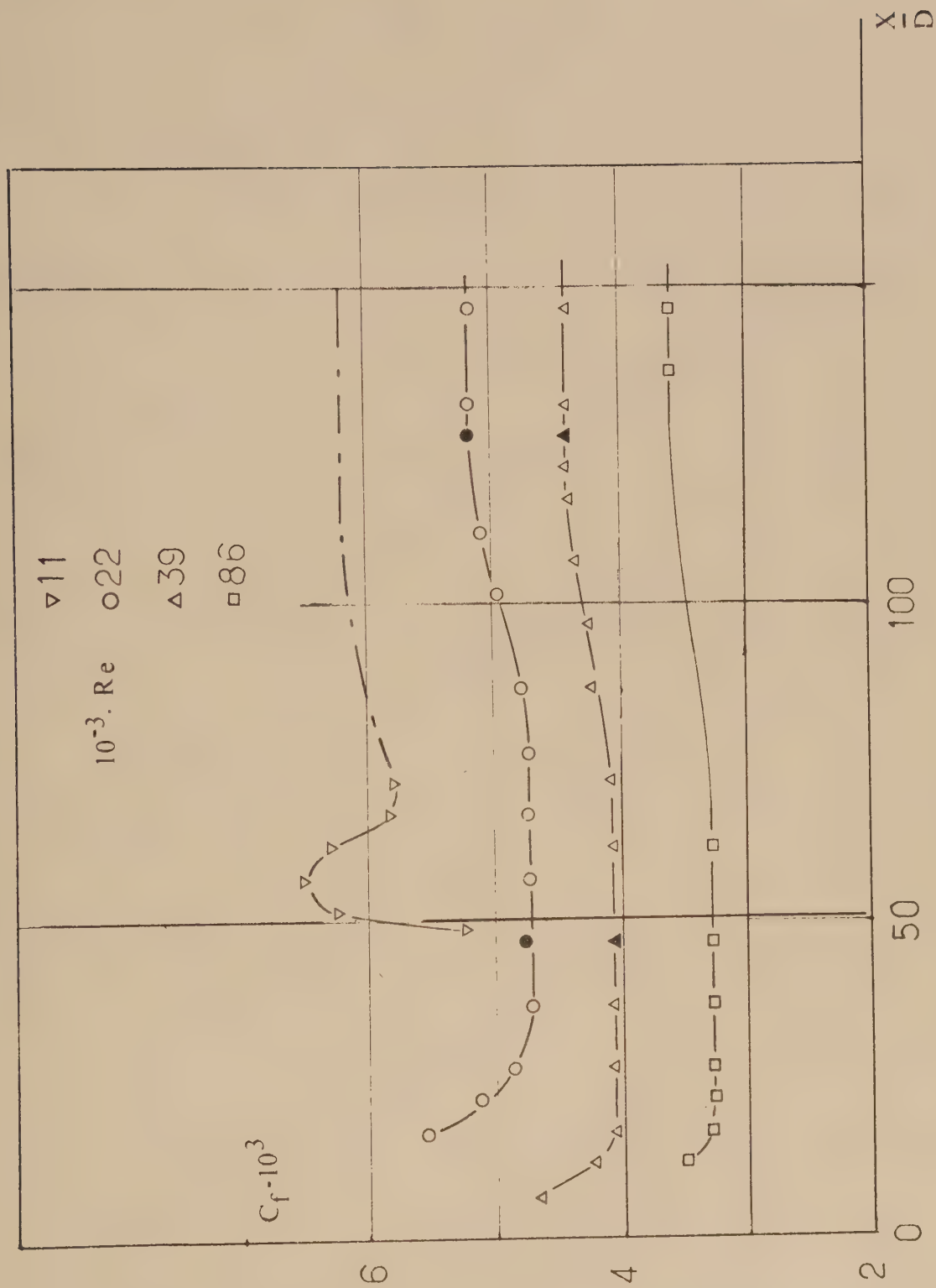


Figure 18 : Frottement pariétal le long du canal

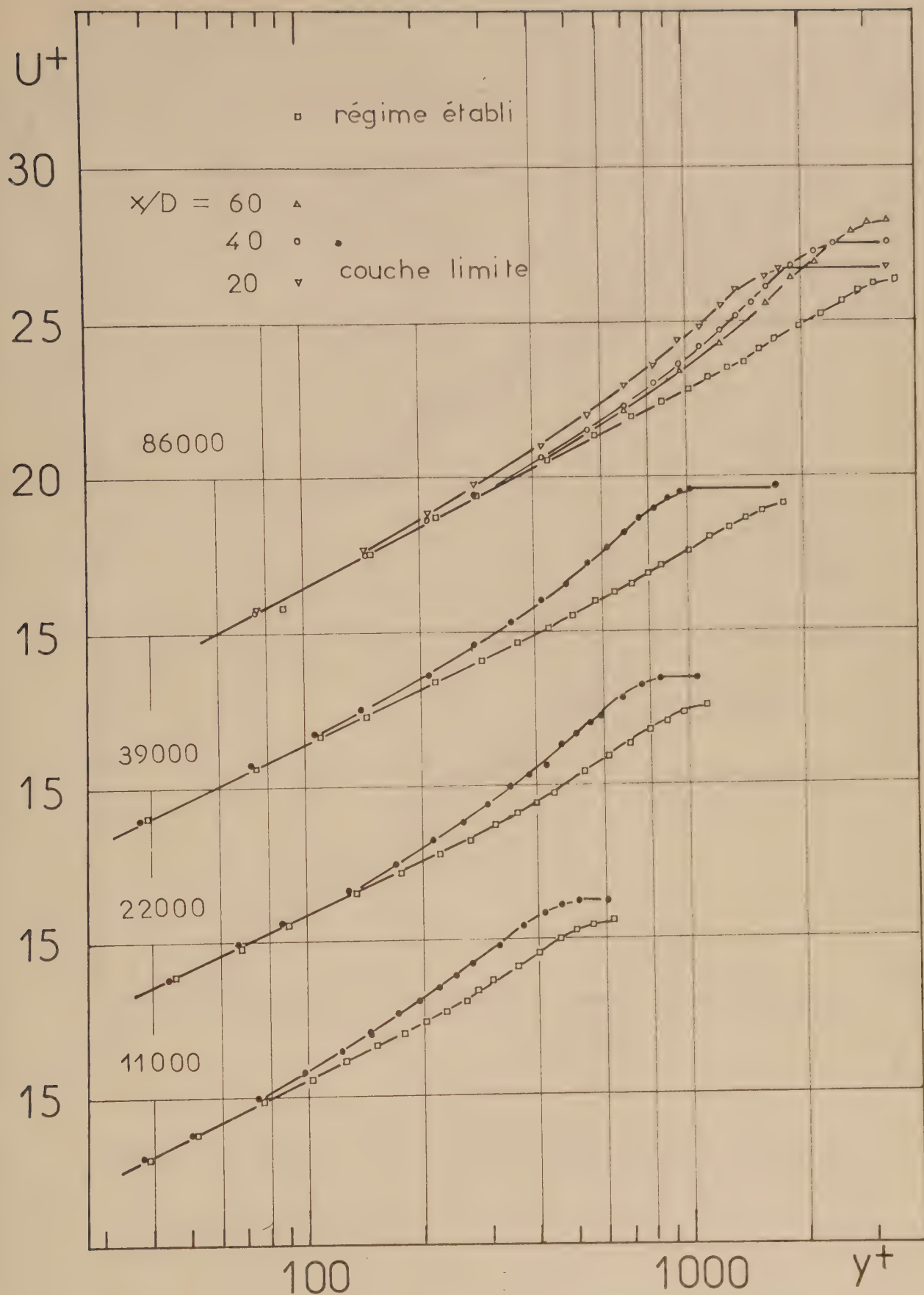


Figure 19 : Evolution des lois de paroi le long du canal

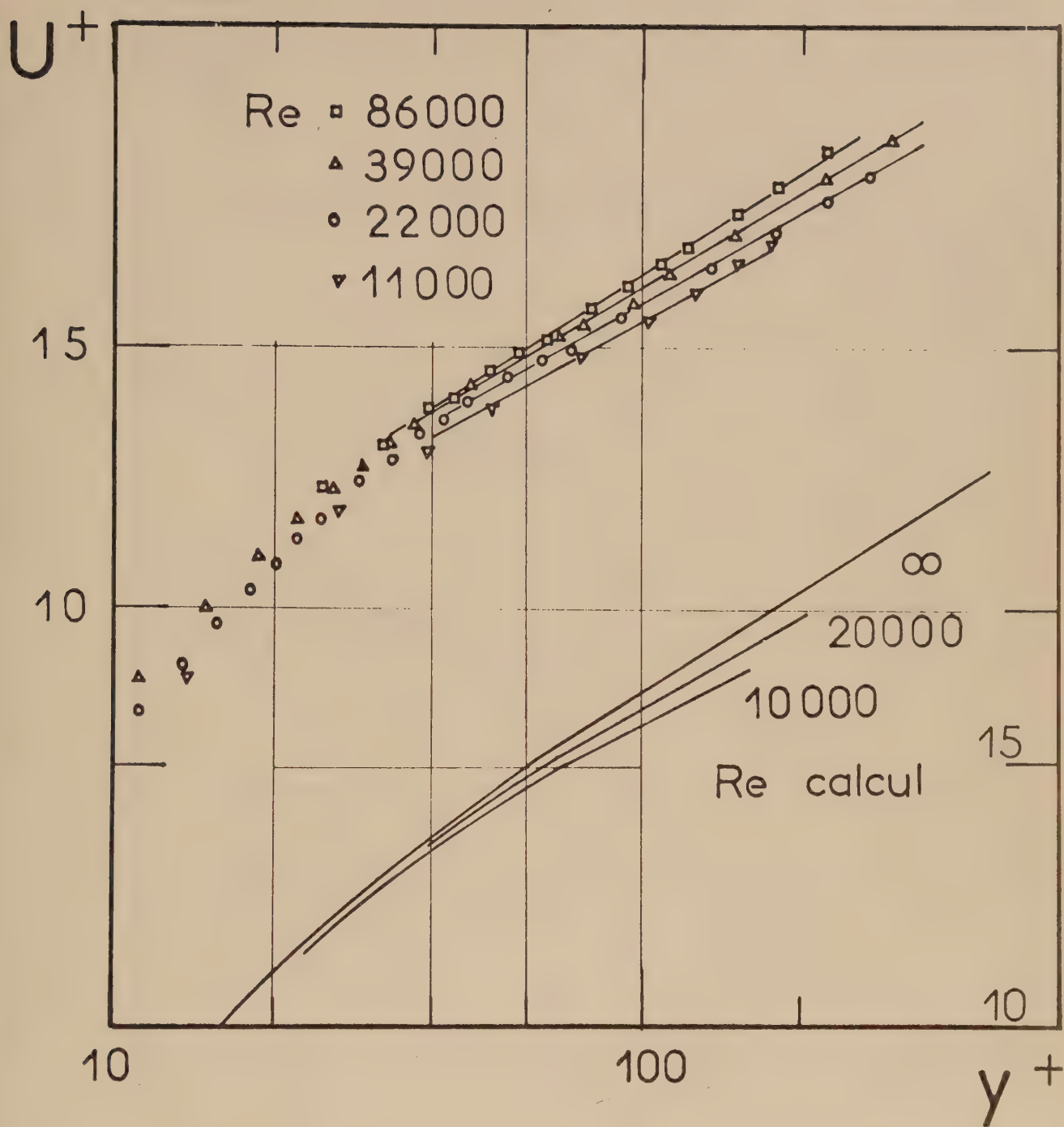


Figure 20 : Influence de Re sur les lois de paroi en régime établi

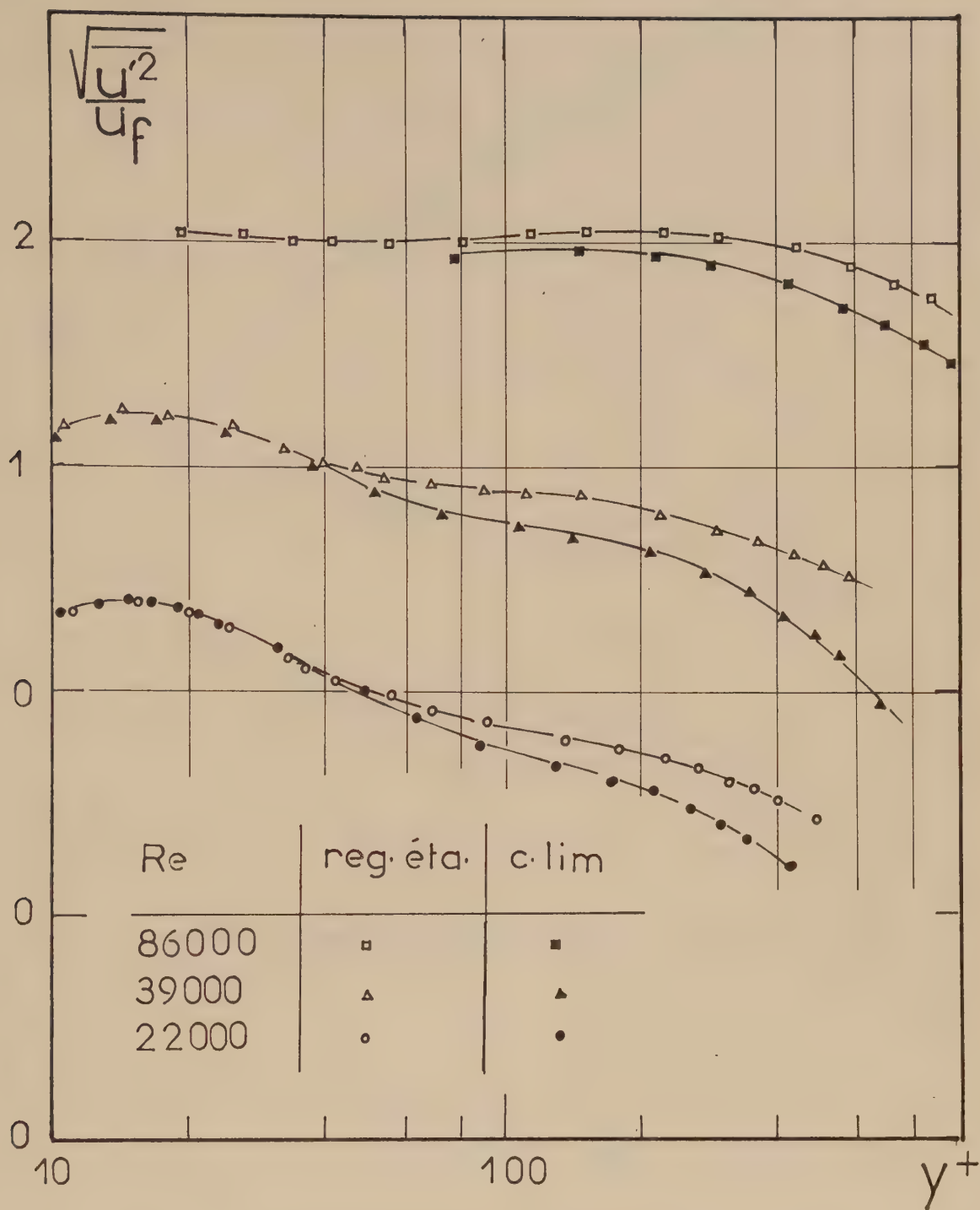


Figure 21 : Intensités de turbulence le long du canal

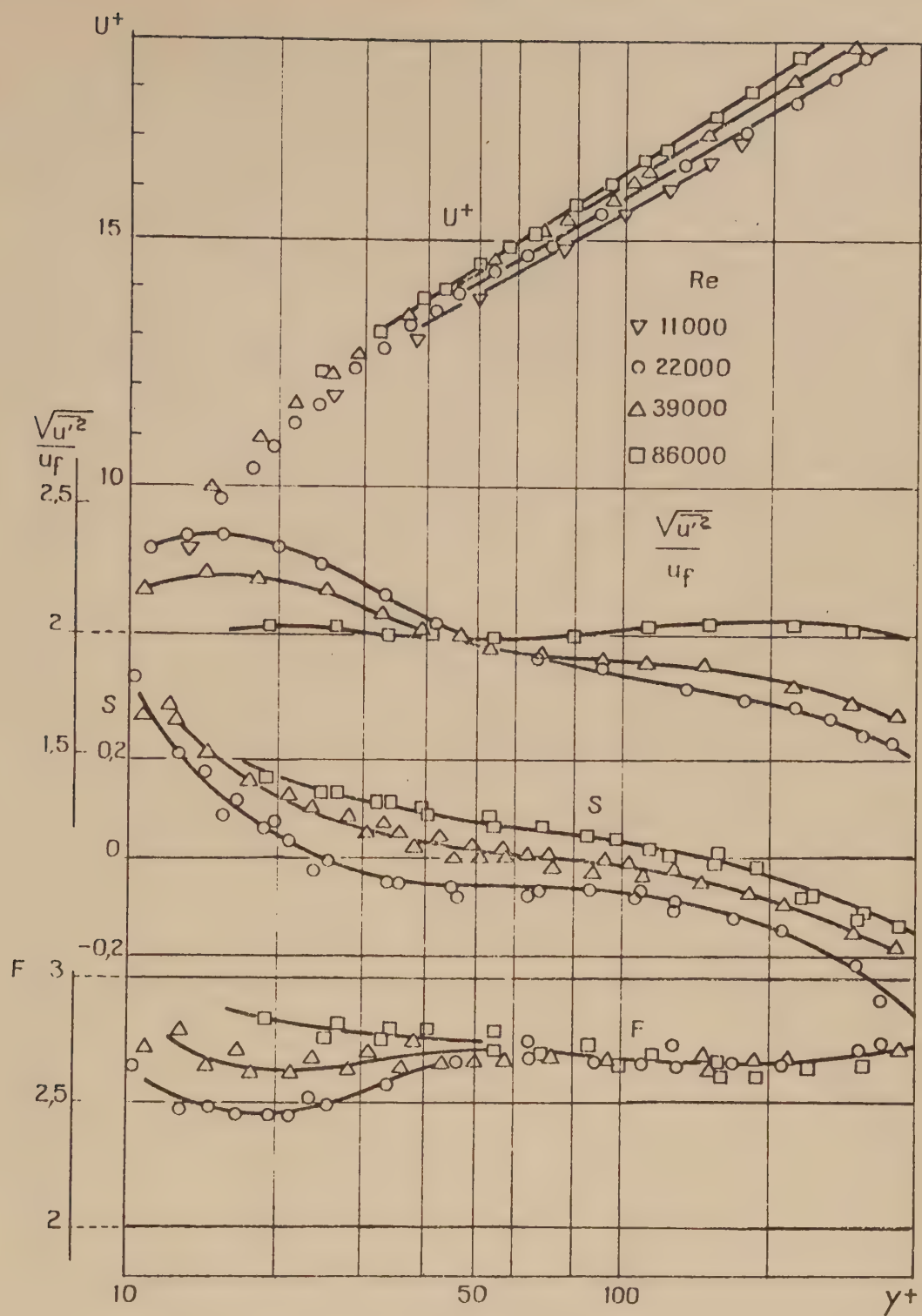


Figure 22 : Evolution comparées des vitesses moyennes, intensités de turbulence, coefficients de dissymétrie et d'aplatissement en régime établi près de la paroi

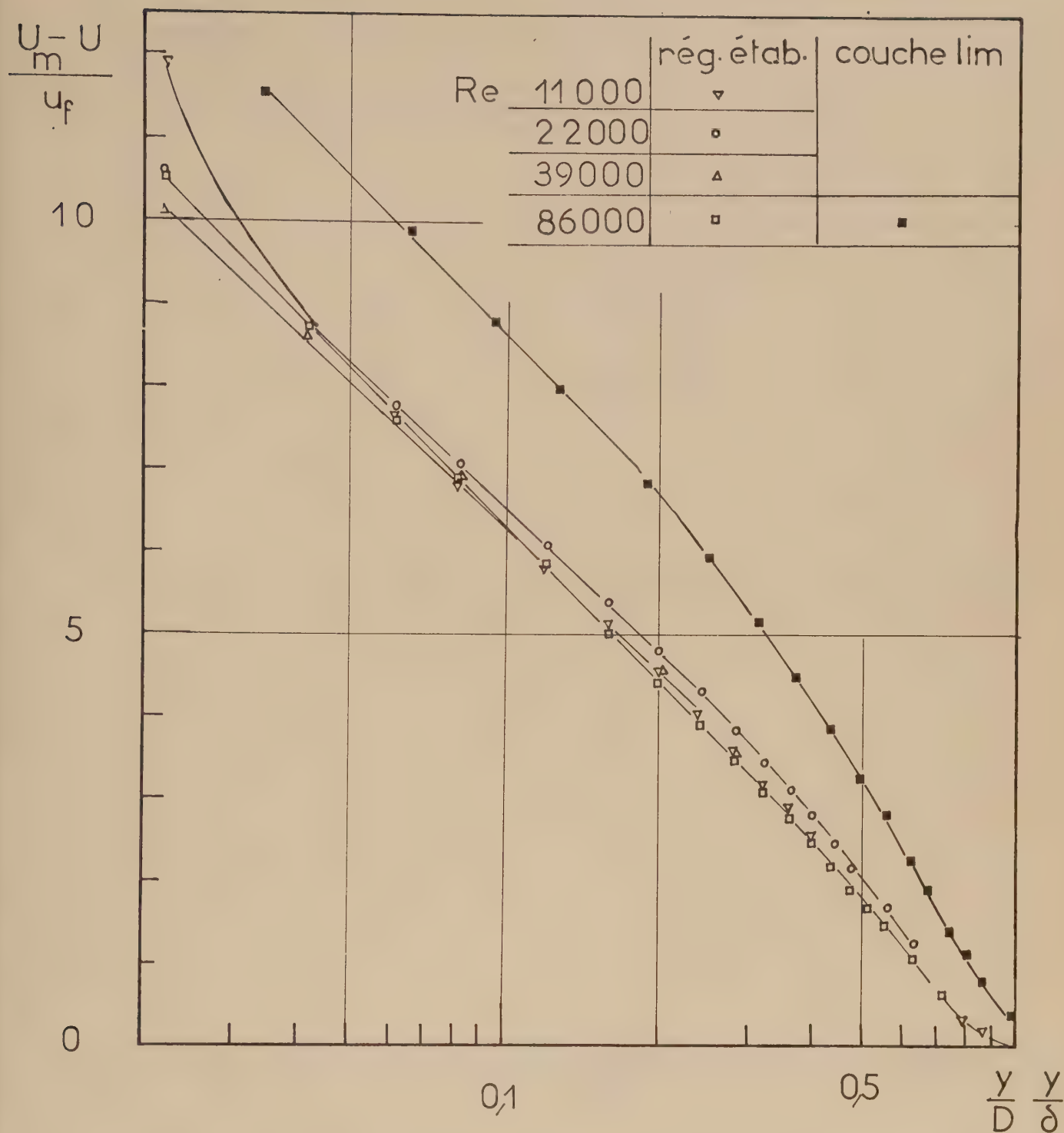


Figure 23 : Influence de Re sur la représentation déficitaire du champ des vitesses en régime établi

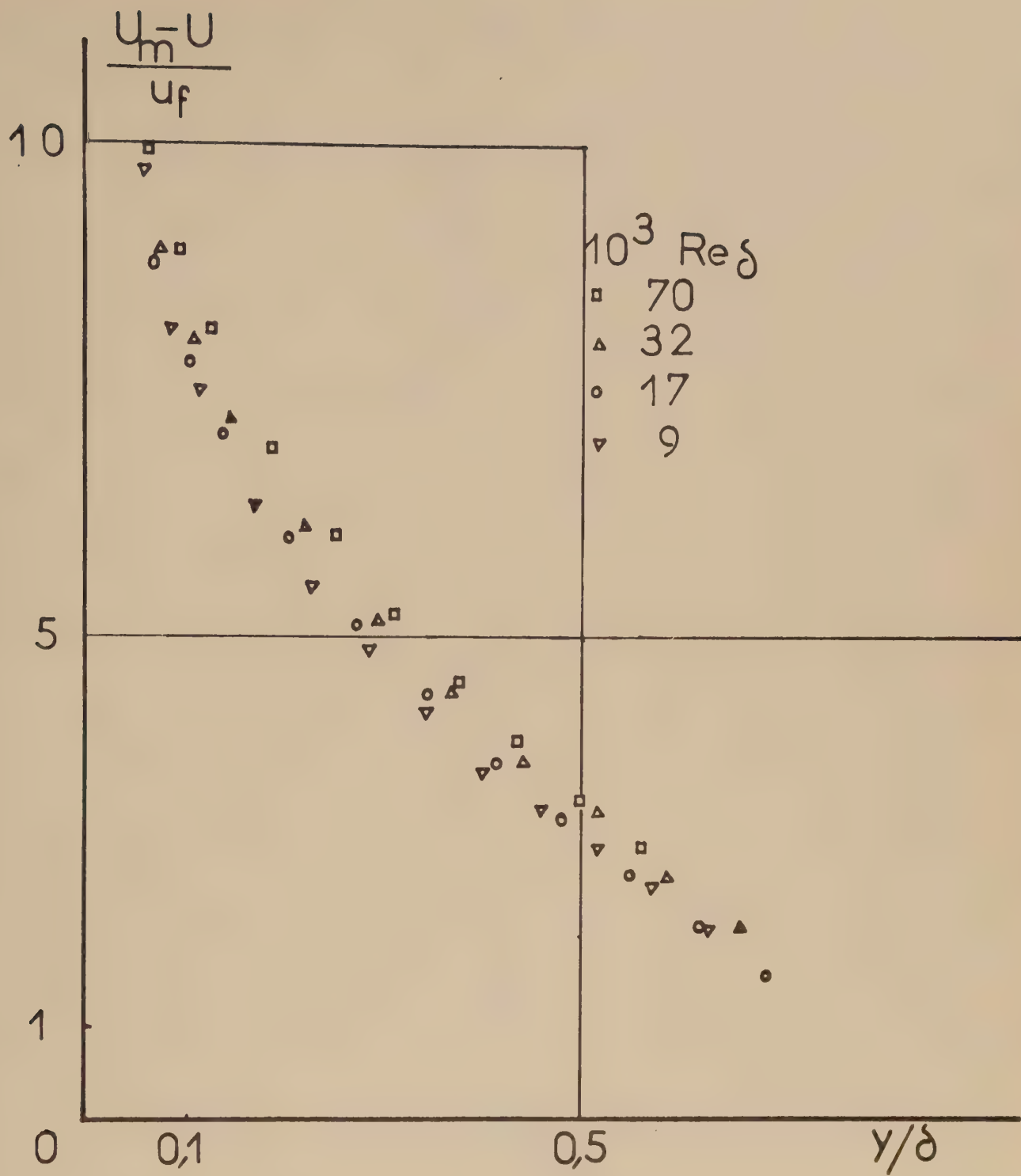


Figure 24 : Influence de Re sur la représentation déficitaire du champ des vitesses en couche limite

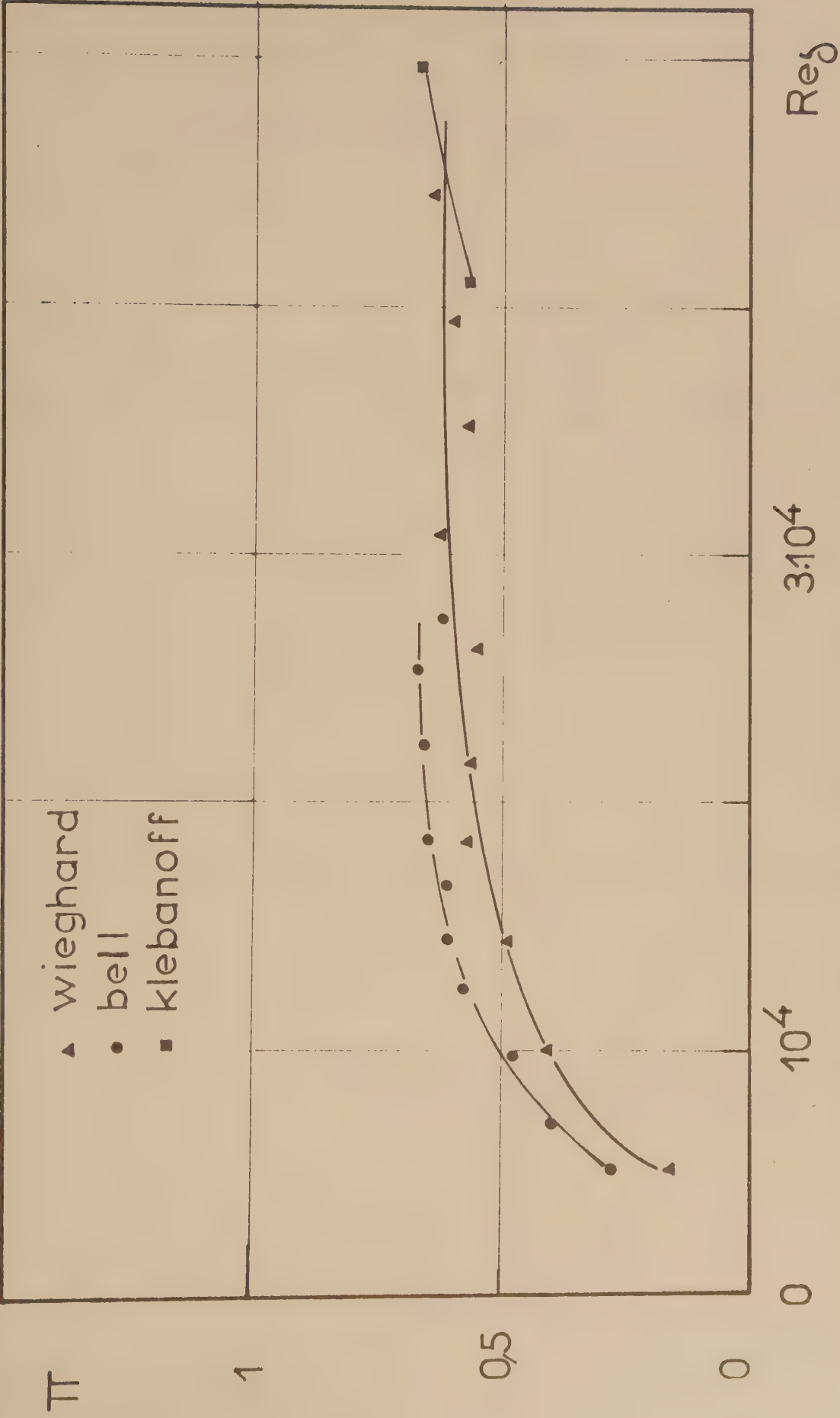


Figure 25 : Influence de Re sur le paramètre π obtenu par différents auteurs

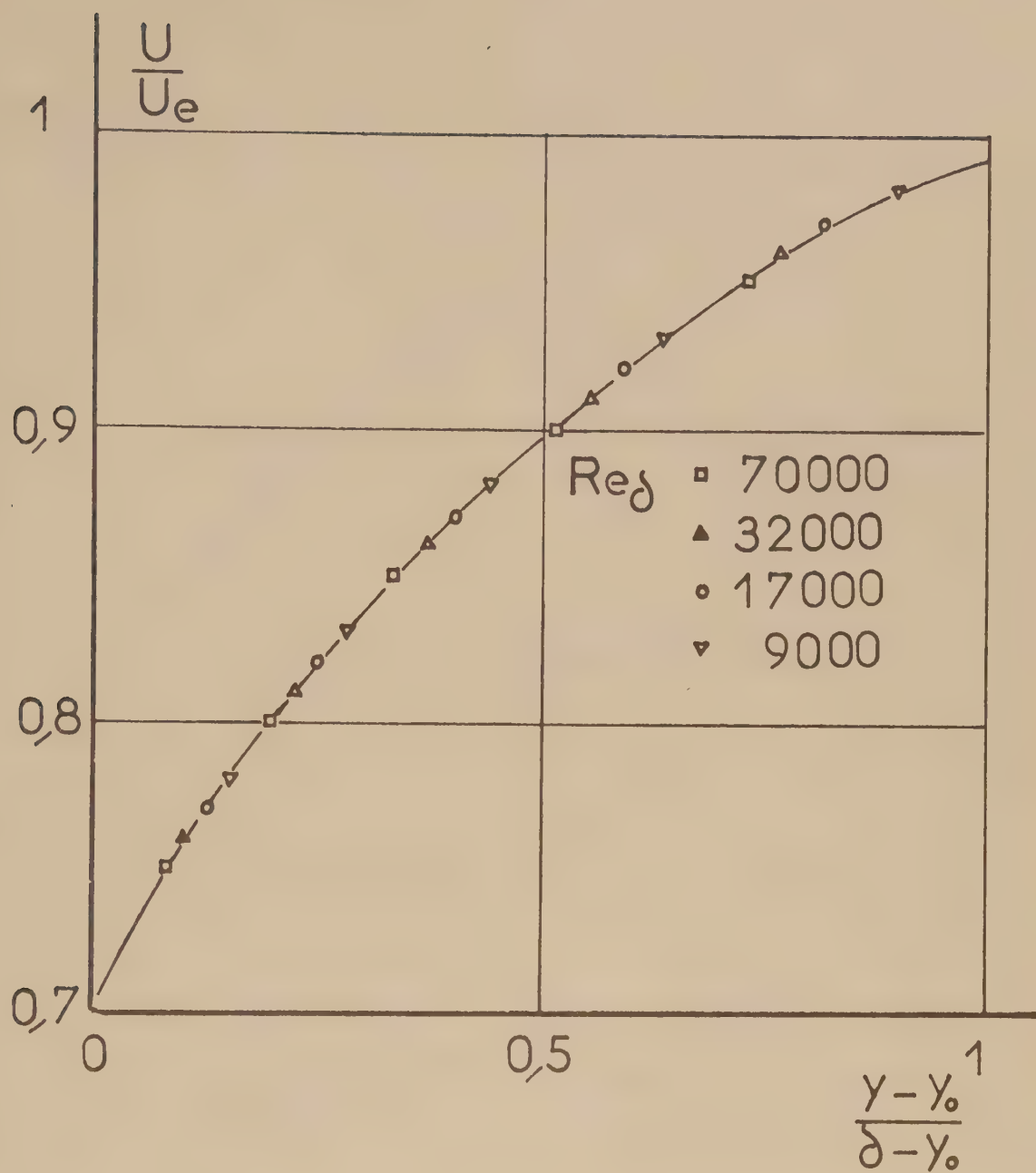


Figure 26 : Nouvelle représentation du champ extérieur des vitesses d'une couche limite turbulente

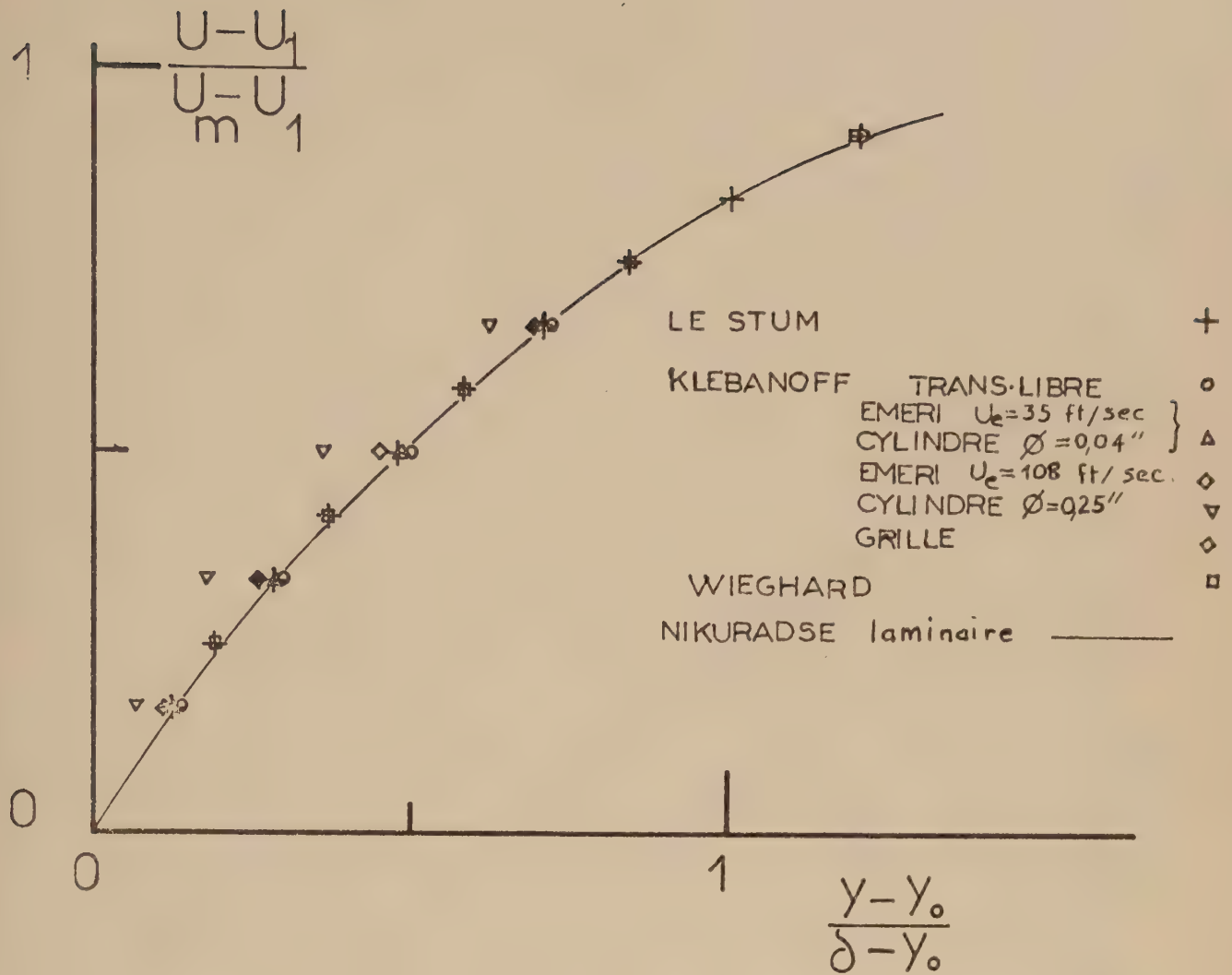


Figure 27 : Influence des conditions initiales sur la loi extérieure des vitesses

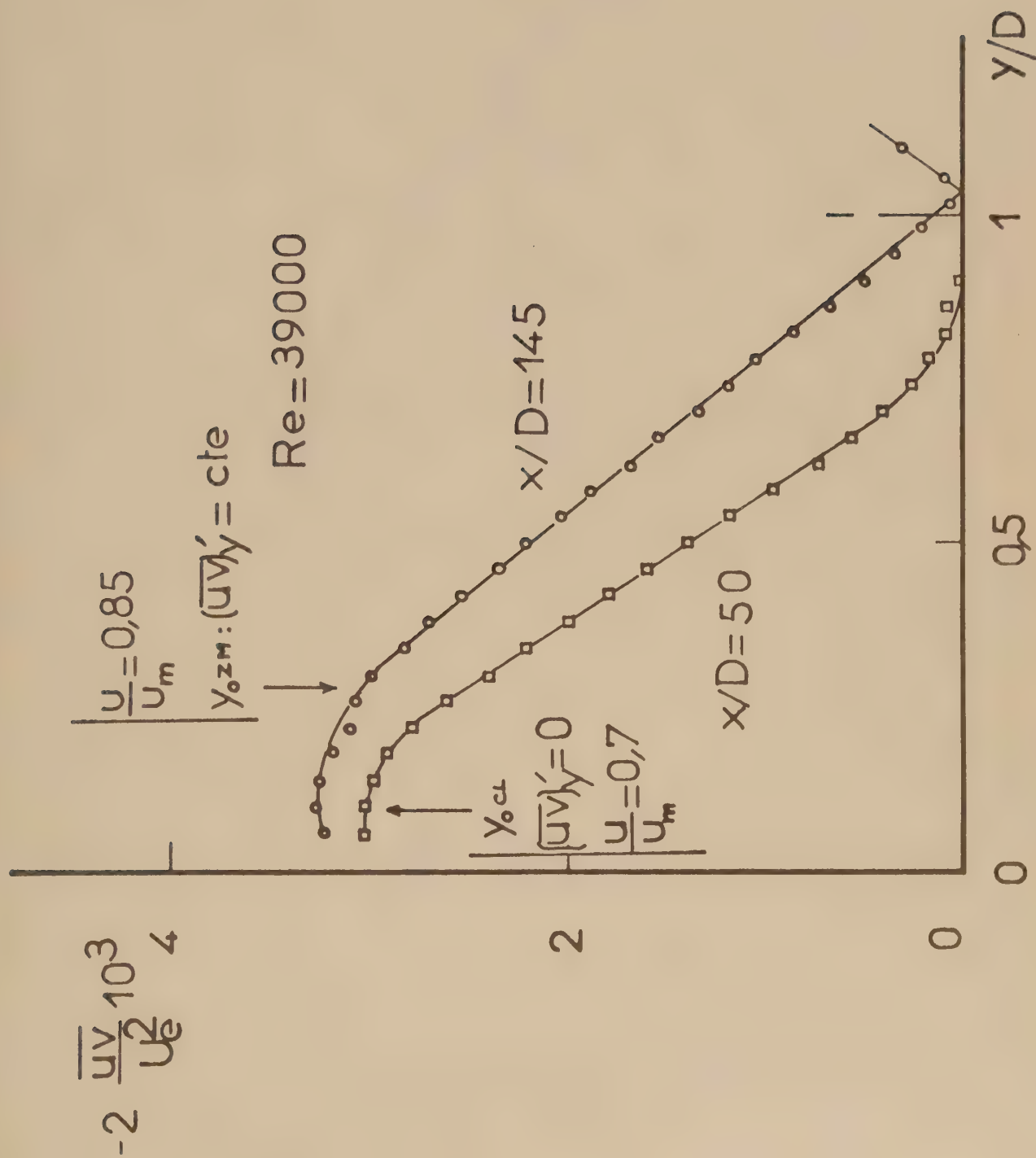


Figure 28 : Evolution du frottement en couche limite et en régime établi

Figure 29 : Loi des vitesses avant correction de dissymétrie

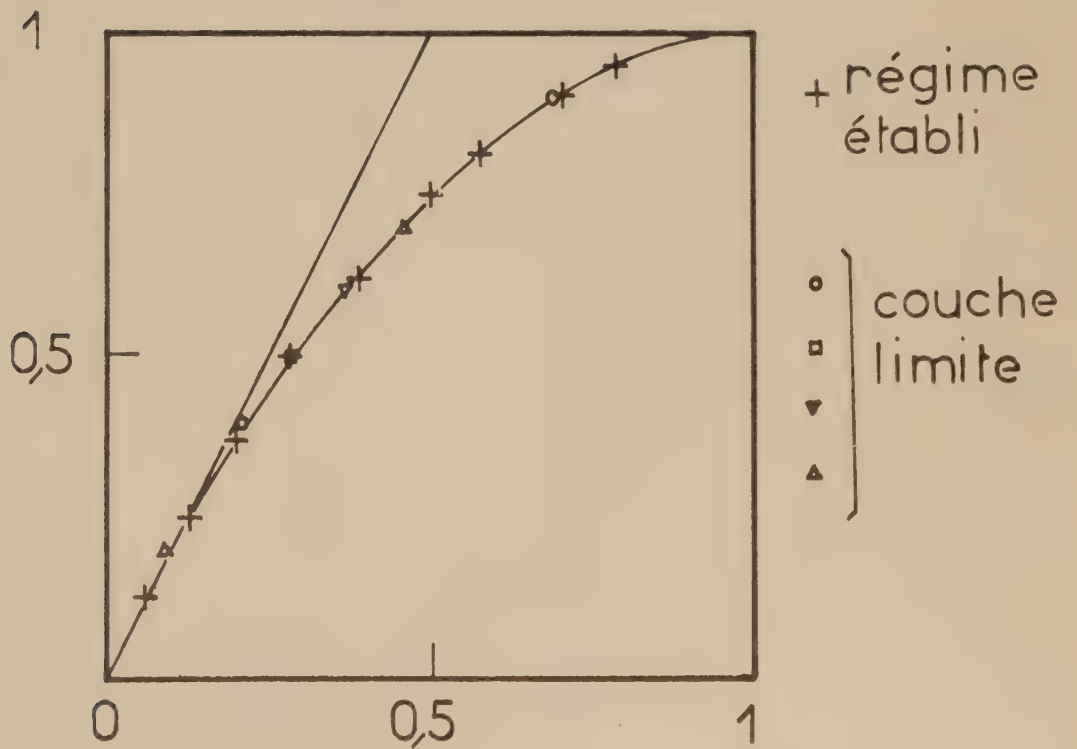
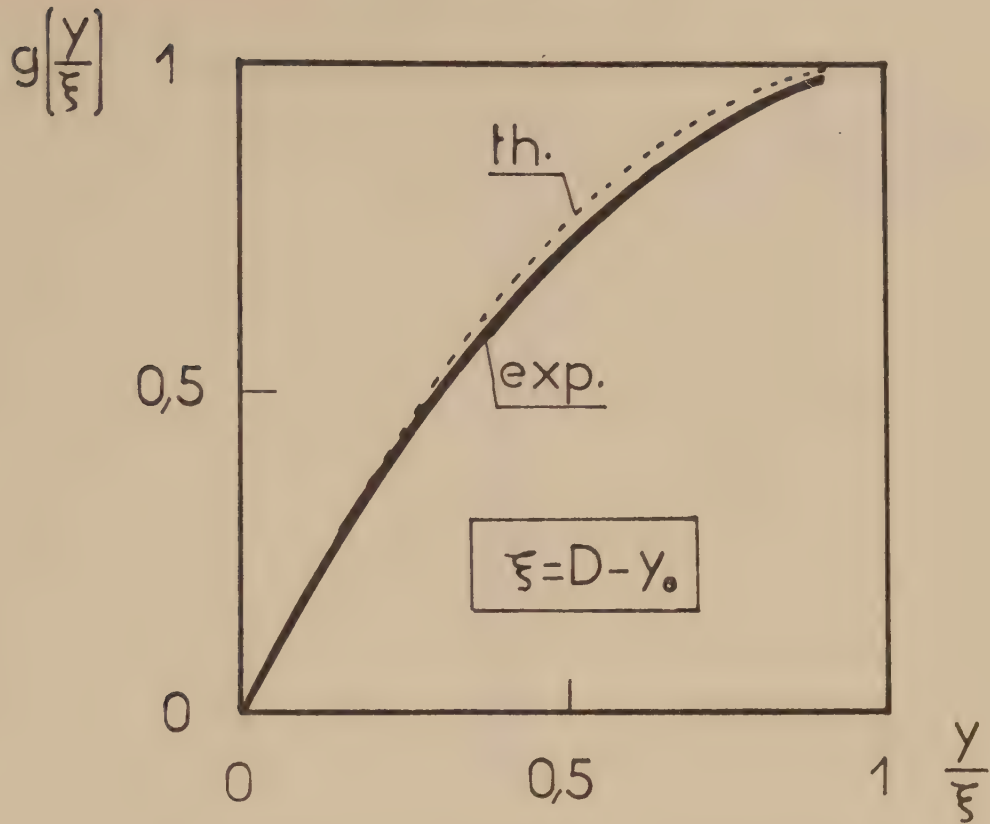


Figure 30 : Comparaison des lois de vitesses expérimentales et théoriques en couche limite et régime établi

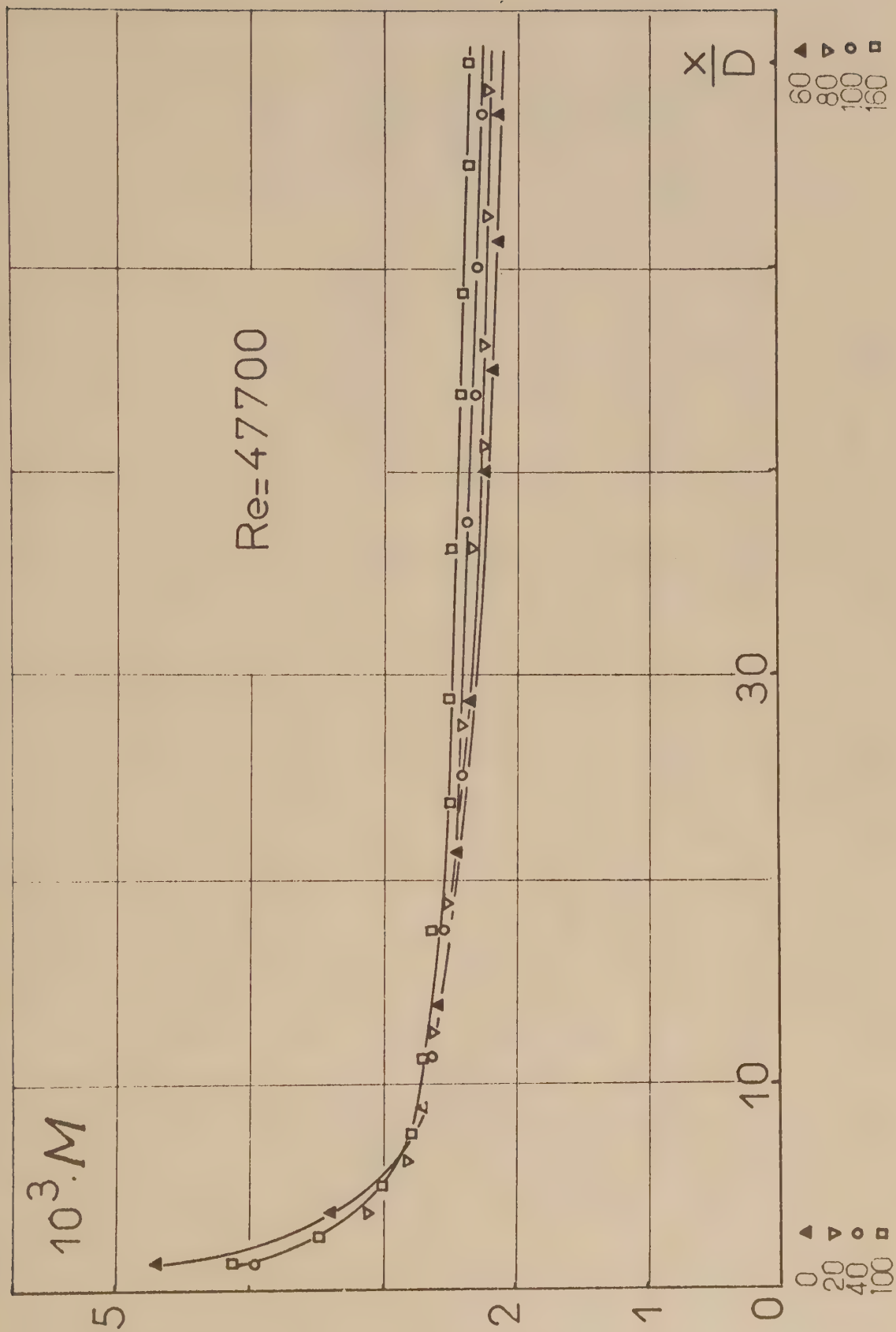


Figure 31 : Evolution du nombre de Margoullis pour différentes positions du modèle chauffant le long du canal

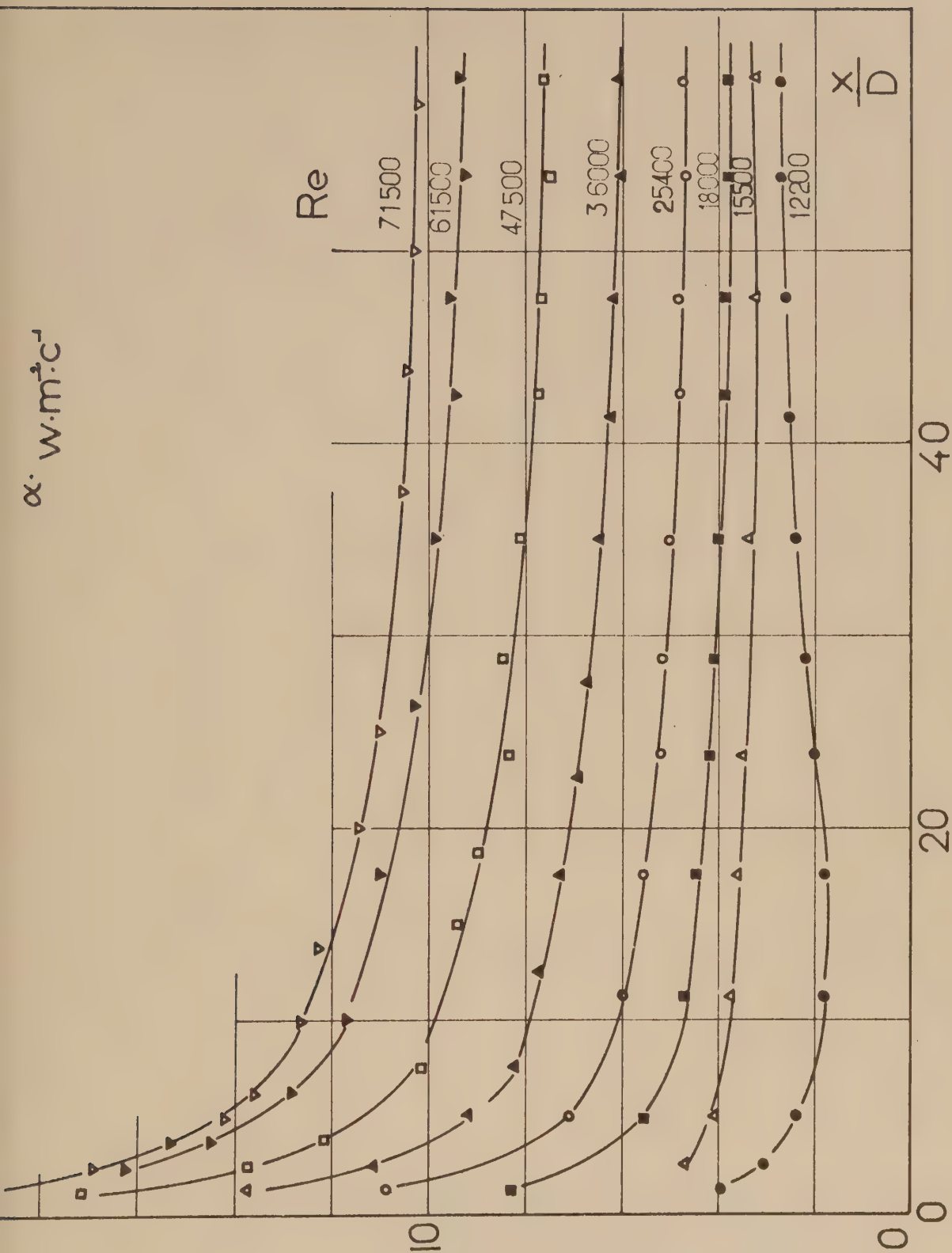


Figure 32 : Evolution du coefficient d'échange en fonction de Re à l'entrée du canal

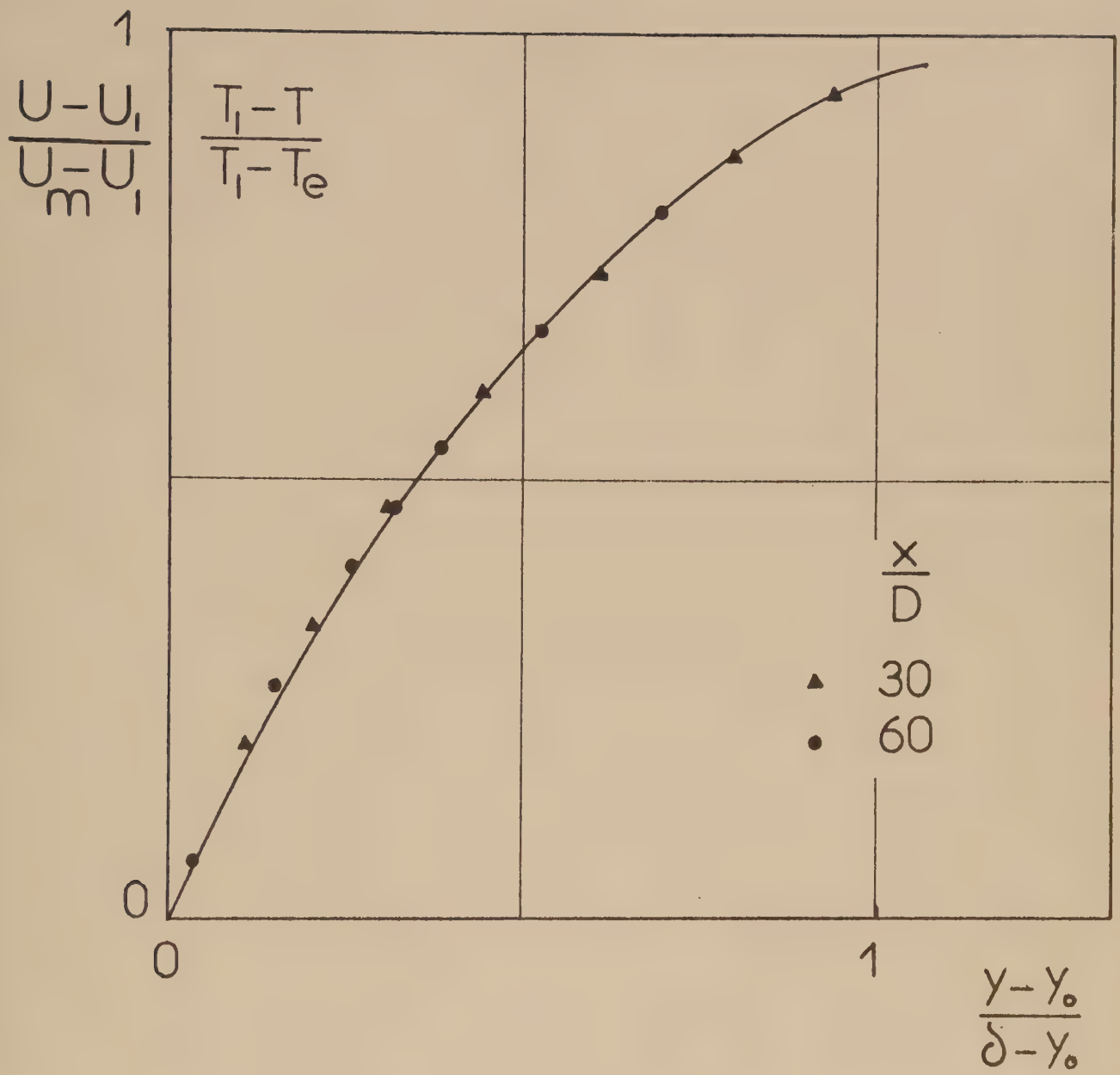


Figure 33 : Comparaison des lois représentatives du champ thermique (points) et dynamique (trait plein) dans la zone de sillage à faibles gradients.

	3	5	7	9	8	10	12	14	18	20	16	22
0.5	0.176	0.144	0.146	0.283	0.065	0.381	0.447	0.387	0.402	0.389	0.408	0.415
1.0	0.387	0.329	0.312	0.454	0.327	0.548	0.592	0.547	0.539	0.534	0.550	0.547
1.5	0.576	0.490	0.482	0.558	0.468	0.639	0.650	0.623	0.603	0.606	0.616	0.608
2	0.727	0.646	0.611	0.653	0.593	0.687	0.689	0.651	0.639	0.633	0.649	0.646
3	0.916	0.850	0.820	0.785	0.774	0.766	0.738	0.708	0.685	0.679	0.697	0.689
4	0.979	0.951	0.931	0.865	0.891	0.825	0.782	0.745	0.717	0.715	0.730	0.726
5	0.992	0.988	0.980	0.912	0.948	0.865	0.811	0.774	0.749	0.742	0.758	0.750
6	0.996	0.996	0.992	0.940	0.972	0.901	0.845	0.802	0.767	0.769	0.782	0.774
7	0.998	0.998	0.996	0.960	0.988	0.925	0.874	0.830	0.795	0.792	0.801	0.797
8	1.000	1.000	1.000	0.972	0.996	0.944	0.893	0.849	0.813	0.810	0.825	0.821
9	1.000	1.000	1.000	0.980	0.998	0.960	0.913	0.868	0.831	0.828	0.844	0.835
10	1.000	1.000	1.000	0.988	1.000	0.972	0.932	0.887	0.849	0.842	0.863	0.849
11	1.000	1.000	1.000	0.992	1.000	0.988	0.947	0.906	0.863	0.855	0.882	0.868
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.961	0.925	0.881	0.869	0.896	0.882
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.976	0.934	0.895	0.882	0.910	0.896
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.981	0.953	0.904	0.900	0.924	0.910
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.990	0.962	0.922	0.914	0.938	0.920
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.972	0.936	0.923	0.948	0.934
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.981	0.950	0.932	0.957	0.943
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.986	0.959	0.946	0.967	0.953
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.968	0.955	0.976	0.962
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.977	0.968	0.986	0.976
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.986	0.977	0.991	0.986
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.986	0.995	0.991
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.991	1.000	0.995
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	1.000	1.000
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tableau I : Re = 11 000

Vitesses réduites (U/U_m) en fonction de l'ordonnée pour différentes sections de mesure.

	2	3	4	5	6	7	15	13	9	7	11	10
0.5	0.186	0.357	0.510	0.535	0.514	0.517	0.493	0.493	0.486	0.517	0.503	0.496
1.0	0.503	0.587	0.650	0.641	0.625	0.617	0.575	0.580	0.591	0.618	0.591	0.593
1.5	0.571	0.750	0.725	0.693	0.668	0.652	0.619	0.622	0.639	0.663	0.633	0.640
2	0.820	0.857	0.780	0.732	0.709	0.692	0.644	0.650	0.669	0.697	0.662	0.669
3	0.931	0.949	0.860	0.790	0.764	0.746	0.686	0.696	0.718	0.746	0.704	0.712
4	0.958	0.979	0.910	0.844	0.808	0.786	0.720	0.726	0.753	0.787	0.738	0.748
5	0.989	0.990	0.945	0.883	0.851	0.821	0.747	0.754	0.788	0.822	0.767	0.778
6	1.000	0.995	0.965	0.922	0.887	0.853	0.771	0.781	0.816	0.854	0.792	0.805
7	1.000	1.000	0.980	0.951	0.918	0.883	0.792	0.803	0.840	0.885	0.818	0.826
8	1.000	1.000	0.990	0.971	0.945	0.910	0.808	0.822	0.867	0.910	0.836	0.852
9	1.000	1.000	0.995	0.985	0.966	0.933	0.829	0.841	0.888	0.935	0.855	0.871
10	1.000	1.000	0.997	0.993	0.986	0.955	0.846	0.858	0.909	0.953	0.876	0.890
11	1.000	1.000	1.000	0.995	0.993	0.975	0.863	0.875	0.923	0.971	0.893	0.911
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.985	0.876	0.892	0.943	0.984	0.910	0.924
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.888	0.904	0.958	0.993	0.927	0.941
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.905	0.917	0.972	0.998	0.939	0.953
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.918	0.930	0.982	1.000	0.952	0.966
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.928	0.943	0.989	1.000	0.964	0.977
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.941	0.955	0.996	1.000	0.973	0.985
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.952	0.966	0.998	1.000	0.981	0.989
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.962	0.975	1.000	1.000	0.985	0.996
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.973	0.985	1.000	1.000	0.994	1.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.981	0.989	1.000	1.000	0.996	1.000
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.985	0.994	1.000	1.000	0.998	1.000
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tableau III : Re = 22 000

	8	12	14	18	20	22	24	26	28	30
* 0.5	* 0.513	* 0.492	* 0.492	* 0.485	* 0.497	* 0.514	* 0.502	* 0.522	* 0.500	* 0.531
* 1.0	* 0.613	* 0.591	* 0.578	* 0.575	* 0.587	* 0.600	* 0.601	* 0.608	* 0.607	* 0.619
* 1.5	* 0.659	* 0.632	* 0.621	* 0.612	* 0.628	* 0.645	* 0.641	* 0.653	* 0.650	* 0.655
* 2	* 0.691	* 0.661	* 0.648	* 0.645	* 0.657	* 0.669	* 0.673	* 0.683	* 0.679	* 0.687
* 3	* 0.737	* 0.705	* 0.692	* 0.686	* 0.702	* 0.718	* 0.715	* 0.726	* 0.722	* 0.732
* 4	* 0.776	* 0.735	* 0.725	* 0.719	* 0.735	* 0.747	* 0.749	* 0.759	* 0.756	* 0.762
* 5	* 0.809	* 0.764	* 0.751	* 0.743	* 0.760	* 0.771	* 0.778	* 0.784	* 0.782	* 0.788
* 6	* 0.839	* 0.789	* 0.773	* 0.768	* 0.780	* 0.796	* 0.798	* 0.806	* 0.808	* 0.809
* 7	* 0.865	* 0.810	* 0.796	* 0.789	* 0.801	* 0.812	* 0.821	* 0.827	* 0.825	* 0.831
* 8	* 0.889	* 0.831	* 0.814	* 0.805	* 0.821	* 0.833	* 0.839	* 0.845	* 0.842	* 0.848
* 9	* 0.913	* 0.852	* 0.834	* 0.825	* 0.833	* 0.849	* 0.854	* 0.862	* 0.859	* 0.861
* 10	* 0.935	* 0.868	* 0.850	* 0.838	* 0.854	* 0.865	* 0.868	* 0.875	* 0.872	* 0.878
* 11	* 0.950	* 0.884	* 0.862	* 0.854	* 0.867	* 0.878	* 0.886	* 0.889	* 0.889	* 0.891
* 12	* 0.970	* 0.899	* 0.883	* 0.871	* 0.883	* 0.890	* 0.901	* 0.901	* 0.897	* 0.904
* 13	* 0.980	* 0.913	* 0.895	* 0.883	* 0.895	* 0.902	* 0.910	* 0.914	* 0.910	* 0.916
* 14	* 0.989	* 0.930	* 0.911	* 0.895	* 0.908	* 0.916	* 0.919	* 0.922	* 0.923	* 0.927
* 15	* 0.995	* 0.942	* 0.923	* 0.908	* 0.920	* 0.931	* 0.930	* 0.931	* 0.932	* 0.938
* 16	* 0.998	* 0.952	* 0.935	* 0.920	* 0.932	* 0.937	* 0.942	* 0.944	* 0.940	* 0.946
* 17	* 1.000	* 0.967	* 0.947	* 0.932	* 0.940	* 0.945	* 0.951	* 0.953	* 0.949	* 0.955
* 18	* 1.000	* 0.975	* 0.957	* 0.940	* 0.953	* 0.955	* 0.960	* 0.961	* 0.962	* 0.964
* 19	* 1.000	* 0.983	* 0.968	* 0.953	* 0.963	* 0.967	* 0.969	* 0.972	* 0.968	* 0.972
* 20	* 1.000	* 0.988	* 0.976	* 0.961	* 0.971	* 0.973	* 0.978	* 0.978	* 0.976	* 0.976
* 21	* 1.000	* 0.992	* 0.984	* 0.973	* 0.979	* 0.980	* 0.982	* 0.985	* 0.983	* 0.983
* 22	* 1.000	* 0.996	* 0.992	* 0.982	* 0.988	* 0.988	* 0.989	* 0.989	* 0.987	* 0.989
* 23	* 1.000	* 1.000	* 0.996	* 0.992	* 0.994	* 0.992	* 0.993	* 0.996	* 0.991	* 0.994
* 24	* 1.000	* 1.000	* 0.998	* 0.996	* 0.998	* 0.998	* 0.996	* 0.998	* 0.998	* 0.998
* 25	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000	* 1.000

Tableau IV : Re = 22 000

*	*	2	*	3	*	4	*	5	*	7	*	7	*	9	*	11	*	15	*	18	*	20	*	22	*

* 0.5	*	0.698	*	0.598	*	0.580	*	0.573	*	0.563	*	0.564	*	0.564	*	0.544	*	0.532	*	0.528	*	0.542	*	0.555	*
* 1.0	*	0.693	*	0.675	*	0.655	*	0.646	*	0.637	*	0.637	*	0.626	*	0.614	*	0.595	*	0.597	*	0.619	*	0.617	*
* 1.5	*	0.741	*	0.721	*	0.696	*	0.690	*	0.677	*	0.673	*	0.663	*	0.653	*	0.634	*	0.633	*	0.652	*	0.658	*
* 2	*	0.778	*	0.755	*	0.732	*	0.722	*	0.709	*	0.707	*	0.695	*	0.683	*	0.663	*	0.662	*	0.681	*	0.684	*
* 3	*	0.848	*	0.816	*	0.789	*	0.775	*	0.757	*	0.751	*	0.738	*	0.725	*	0.702	*	0.707	*	0.724	*	0.727	*
* 4	*	0.905	*	0.859	*	0.830	*	0.816	*	0.794	*	0.791	*	0.775	*	0.759	*	0.734	*	0.734	*	0.753	*	0.761	*
* 5	*	0.953	*	0.902	*	0.869	*	0.854	*	0.823	*	0.821	*	0.802	*	0.785	*	0.759	*	0.763	*	0.777	*	0.785	*
* 6	*	0.981	*	0.939	*	0.905	*	0.886	*	0.851	*	0.849	*	0.829	*	0.808	*	0.780	*	0.784	*	0.799	*	0.806	*
* 7	*	0.994	*	0.963	*	0.935	*	0.912	*	0.877	*	0.871	*	0.850	*	0.829	*	0.800	*	0.803	*	0.815	*	0.823	*
* 8	*	0.995	*	0.983	*	0.958	*	0.936	*	0.900	*	0.897	*	0.872	*	0.847	*	0.820	*	0.820	*	0.835	*	0.837	*
* 9	*	0.997	*	0.994	*	0.979	*	0.959	*	0.920	*	0.919	*	0.893	*	0.865	*	0.834	*	0.837	*	0.849	*	0.854	*
* 10	*	1.000	*	1.000	*	0.991	*	0.977	*	0.940	*	0.939	*	0.912	*	0.886	*	0.851	*	0.854	*	0.863	*	0.866	*
* 11	*	1.000	*	1.000	*	0.994	*	0.991	*	0.954	*	0.955	*	0.928	*	0.904	*	0.866	*	0.868	*	0.878	*	0.883	*
* 12	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.997	*	0.971	*	0.972	*	0.944	*	0.920	*	0.878	*	0.878	*	0.892	*	0.895	*
* 13	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.983	*	0.983	*	0.957	*	0.935	*	0.893	*	0.892	*	0.902	*	0.904	*
* 14	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.989	*	0.989	*	0.968	*	0.951	*	0.907	*	0.906	*	0.914	*	0.919	*
* 15	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.994	*	0.994	*	0.979	*	0.959	*	0.917	*	0.914	*	0.926	*	0.928	*
* 16	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.989	*	0.974	*	0.927	*	0.926	*	0.935	*	0.938	*
* 17	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.995	*	0.982	*	0.939	*	0.940	*	0.947	*	0.947	*
* 18	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.990	*	0.951	*	0.947	*	0.954	*	0.955	*
* 19	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.995	*	0.961	*	0.959	*	0.959	*	0.962	*
* 20	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.966	*	0.969	*	0.969	*	0.971	*
* 21	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.976	*	0.978	*	0.978	*	0.978	*
* 22	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.980	*	0.983	*	0.986	*	0.986	*
* 23	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.985	*	0.993	*	0.993	*	0.990	*
* 24	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.993	*	0.998	*	0.995	*	0.995	*
* 25	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.995	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*

Tableau V : Re = 39 000

*	*	24	*	26	*	13	*	6	*
								16	*
								16	*
								28	*
								30	*

*	0.5	*	0.555	*	0.562	*	0.553	*	0.578
									0.538
									0.540
									0.576
									0.579
*	1.0	*	0.622	*	0.633	*	0.612	*	0.647
									0.607
									0.606
									0.641
									0.642
*	1.5	*	0.663	*	0.671	*	0.651	*	0.686
									0.642
									0.641
									0.677
									0.683
*	2	*	0.691	*	0.700	*	0.684	*	0.715
									0.669
									0.672
									0.705
									0.712
*	3	*	0.737	*	0.748	*	0.721	*	0.770
									0.711
									0.712
									0.747
									0.758
*	4	*	0.766	*	0.776	*	0.751	*	0.804
									0.740
									0.742
									0.780
									0.787
*	5	*	0.789	*	0.800	*	0.777	*	0.838
									0.764
									0.768
									0.806
									0.813
*	6	*	0.809	*	0.824	*	0.800	*	0.868
									0.784
									0.788
									0.824
									0.831
*	7	*	0.828	*	0.838	*	0.819	*	0.895
									0.804
									0.808
									0.845
									0.849
*	8	*	0.842	*	0.855	*	0.837	*	0.922
									0.822
									0.823
									0.860
									0.868
*	9	*	0.856	*	0.867	*	0.856	*	0.941
									0.840
									0.841
									0.873
									0.881
*10	*	0.873	*	0.881	*	0.870	*	0.961	*
									0.853
									0.856
									0.884
									0.894
*11	*	0.885	*	0.898	*	0.884	*	0.975	*
									0.869
									0.871
									0.899
									0.906
*12	*	0.900	*	0.907	*	0.900	*	0.990	*
									0.884
									0.884
									0.910
									0.919
*13	*	0.914	*	0.919	*	0.914	*	0.995	*
									0.898
									0.899
									0.920
									0.927
*14	*	0.923	*	0.929	*	0.926	*	1.000	*
									0.907
									0.909
									0.930
									0.938
*15	*	0.933	*	0.938	*	0.937	*	1.000	*
									0.920
									0.924
									0.941
									0.945
*16	*	0.943	*	0.948	*	0.949	*	1.000	*
									0.931
									0.934
									0.948
									0.956
*17	*	0.952	*	0.957	*	0.958	*	1.000	*
									0.942
									0.944
									0.959
									0.964
*18	*	0.962	*	0.967	*	0.967	*	1.000	*
									0.951
									0.955
									0.969
									0.971
*19	*	0.971	*	0.971	*	0.977	*	1.000	*
									0.960
									0.960
									0.974
									0.977
*20	*	0.976	*	0.981	*	0.981	*	1.000	*
									0.969
									0.970
									0.982
									0.982
*21	*	0.981	*	0.986	*	0.986	*	1.000	*
									0.978
									0.980
									0.987
									0.987
*22	*	0.990	*	0.990	*	0.993	*	1.000	*
									0.987
									0.985
									0.992
									0.992
*23	*	0.993	*	0.995	*	0.995	*	1.000	*
									0.991
									0.990
									0.995
									0.997
*24	*	0.995	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*
									0.995
									0.997
									1.000
*25	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*
									1.000
									1.000

Tableau VI : Re = 39 000

*	*	3	*	4	*	5	*	7	*	11	*	13	*	15	*	18	*	21	*	24	*	27	*	30	*	9					

*	0.5	*	0.625	*	0.615	*	0.595	*	0.593	*	0.559	*	0.572	*	0.559	*	0.565	*	0.588	*	0.592	*	0.596	*	0.601	*	0.535				
*	1.0	*	0.690	*	0.680	*	0.665	*	0.652	*	0.626	*	0.627	*	0.620	*	0.636	*	0.648	*	0.658	*	0.659	*	0.667	*	0.627				
*	1.5	*	0.735	*	0.722	*	0.706	*	0.695	*	0.665	*	0.665	*	0.660	*	0.668	*	0.683	*	0.696	*	0.701	*	0.711	*	0.677				
*	2	*	0.768	*	0.751	*	0.741	*	0.718	*	0.693	*	0.692	*	0.686	*	0.701	*	0.715	*	0.721	*	0.731	*	0.738	*	0.706				
*	3	*	0.821	*	0.802	*	0.787	*	0.764	*	0.732	*	0.733	*	0.726	*	0.741	*	0.753	*	0.762	*	0.769	*	0.780	*	0.748				
*	4	*	0.863	*	0.840	*	0.825	*	0.798	*	0.765	*	0.763	*	0.755	*	0.771	*	0.780	*	0.792	*	0.802	*	0.810	*	0.781				
*	5	*	0.905	*	0.876	*	0.857	*	0.826	*	0.793	*	0.785	*	0.779	*	0.792	*	0.805	*	0.816	*	0.824	*	0.832	*	0.810				
*	6	*	0.935	*	0.905	*	0.886	*	0.855	*	0.816	*	0.807	*	0.803	*	0.814	*	0.824	*	0.833	*	0.841	*	0.854	*	0.835				
*	7	*	0.964	*	0.932	*	0.913	*	0.877	*	0.838	*	0.823	*	0.822	*	0.830	*	0.843	*	0.852	*	0.860	*	0.868	*	0.858				
*	8	*	0.982	*	0.959	*	0.936	*	0.900	*	0.860	*	0.845	*	0.840	*	0.849	*	0.856	*	0.868	*	0.874	*	0.882	*	0.880				
*	9	*	0.994	*	0.976	*	0.956	*	0.923	*	0.877	*	0.861	*	0.856	*	0.863	*	0.873	*	0.882	*	0.887	*	0.895	*	0.881				
*10	*	1.000	*	0.988	*	0.974	*	0.943	*	0.894	*	0.877	*	0.872	*	0.879	*	0.883	*	0.896	*	0.898	*	0.906	*	0.917	0.917				
*11	*	1.000	*	0.994	*	0.988	*	0.957	*	0.911	*	0.894	*	0.888	*	0.889	*	0.894	*	0.907	*	0.912	*	0.917	*	0.931	0.931				
*12	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.974	*	0.927	*	0.907	*	0.899	*	0.903	*	0.908	*	0.918	*	0.923	*	0.928	*	0.947	0.947				
*13	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.986	*	0.941	*	0.921	*	0.915	*	0.914	*	0.919	*	0.929	*	0.931	*	0.937	*	0.957	0.957				
*14	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.994	*	0.953	*	0.932	*	0.926	*	0.925	*	0.929	*	0.937	*	0.940	*	0.945	*	0.973	0.973				
*15	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.966	*	0.946	*	0.936	*	0.935	*	0.940	*	0.948	*	0.951	*	0.953	*	0.982	0.982				
*16	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.975	*	0.956	*	0.947	*	0.946	*	0.949	*	0.956	*	0.956	*	0.961	*	0.988	0.988				
*17	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.983	*	0.967	*	0.957	*	0.957	*	0.957	*	0.964	*	0.964	*	0.967	*	0.993	0.993				
*18	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.988	*	0.975	*	0.965	*	0.962	*	0.965	*	0.973	*	0.972	*	0.975	*	1.000	1.000				
*19	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.994	*	0.981	*	0.973	*	0.970	*	0.973	*	0.978	*	0.978	*	0.981	*						
*20	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.986	*	0.984	*	0.980	*	0.981	*	0.986	*	0.983	*	0.986	*						
*21	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.992	*	0.989	*	0.987	*	0.986	*	0.989	*	0.989	*	0.989	*						
*22	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.992	*	0.992	*	0.992	*	0.995	*	0.995	*	0.994	*						
*23	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.995	*	0.995	*	0.997	*	0.997	*	0.997	*	0.997	*						
*24	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	0.997	*	0.997	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*						
*25	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*	1.000	*						

Tableau VII : Re = 86 000

